

چکیده مبسوط

اولین سمینار  
کنترل و بهینه‌سازی

دانشگاه فردوسی مشهد، ایران  
۱۹-۲۰ مهرماه ۱۳۹۶



# فهرست مطالب

۱	خیرمقدم
۱	نمایه نویسندگان
۲	سخنرانی‌ها
۳۴	پوسترها

## خیر مقدم

خداوند بزرگ را شاکریم که توفیقمان عنایت فرمود تا در آغازین روزهای سال تحصیلی ۱۳۹۶-۹۷ اولین سمینار کنترل و بهینه‌سازی را در جوار بارگاه منور رضوی برگزار نماییم. دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد به عنوان میزبان افتخار دارد اولین گردهمایی علمی تخصصی کنترل و بهینه‌سازی در کشور را با تقدیر از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد که یکی از اساتید پیشگام، برجسته و تاثیرگذار در این حوزه است همراه نماید. استقبال، حضور و گردهمایی بیش از ۱۲۰ شرکت کننده از دانشگاهها و موسسات علمی به همراه ارایه ۵۰ مقاله پذیرفته شده، نشان از بسط و گسترش رشته کنترل ریاضی در دانشگاه‌های سراسر کشور دارد. علاوه بر ارایه مقالات، ارایه سه سخنرانی عمومی توسط اساتید برجسته این رشته، تشکیل یک میزگرد با موضوع راه اندازی رشته کنترل ریاضی و همچنین تاسیس انجمنی به همین نام از دیگر برنامه‌های علمی است که برای دو روز برگزاری این سمینار تدارک دیده شد.

در پایان، از کلیه شرکت کنندگان محترم اعم از اعضای هیات علمی دانشگاهها، دانشجویان، برگزارکنندگان نشست‌ها، سخنرانان مدعو، اعضای کمیته علمی و اجرایی و کلیه عزیزانی که در برگزاری این رویداد علمی مشارکت نموده‌اند، کمال تشکر و امتنان را داریم. در برگزاری این سمینار از حمایت‌های بی دریغ هیات ریسه محترم دانشگاه فردوسی مشهد، مدیریت محترم دانشکده علوم ریاضی، انجمن ریاضی ایران، پایگاه استنادی علوم جهان اسلام، مرکز آثار و مفاخر دانشگاه فردوسی مشهد، قطب علمی آنالیز روی ساختارهای جبری، قطب علمی مدل‌سازی و کنترل دستگاهها، اعضای کمیته‌های علمی و اجرایی، کارکنان و دانشجویان عزیز دانشکده علوم ریاضی و سایر حمایت کنندگان بهره‌مند بوده‌ایم. بدینوسیله مراتب سپاس و قدرانی خود را به محضر شریف آنان عرضه می‌داریم.

دبیر سمینار  
دکتر سهراب عفتی  
دبیران علمی سمینار  
دکتر محمد هادی فراهی و مرحوم دکتر حامد رضا طارقیان

# نمایه نویسندگان

- آریان‌مهر، صدیقه، ۳۴  
ابراهیمی، نوراله، ۲۲  
ادیبان، مهدی، ۹۰  
اسراری درح، طیبه، ۶۶  
اکبرزاده توتونچی، محمدرضا، ۲۶  
باغانی، امید، ۵۴، ۵۸  
برومندنژاد، نرگس، ۸۲  
توکلی، مصطفی، ۷۸  
حسین پور سرخ آبادی، سمیه، ۴۶  
حیدری، عقیده، ۱۸، ۲۲، ۷۰  
دستجردی، محمدتقی، ۹۰  
دعاگویی، علیرضا، ۱۰  
رنجبر تقی آباد، مهدی، ۲  
رهبرنیا، فریدون، ۷۸  
زادکریمی، محمدرضا، ۴۲  
سعیدی جیبری، شادی، ۴۲  
سلیمانی فرد، امید، ۸۶  
شکوهی امیری، هادی، ۵۰  
شیرازیان، محمد، ۴۶  
ضمیریان، محمد، ۲۲  
عباسی، انسیه، ۵۴، ۵۸  
عبدالله زاده، ابوالفضل، ۳۰، ۶۲  
عرفانیان، حمیدرضا، ۳۹  
عفتی، سهراب، ۲، ۷، ۶۶  
غفوری، سعیده، ۵۴، ۵۸  
فتوحی بافقی، محمدحسین، ۷  
فخارزاده جهرمی، علیرضا، ۳۴  
فرح‌بخش، آرمان، ۳۰، ۶۲  
قاسمیان، جواد، ۸۶  
محمدخان سرتیپ، سحر، ۷۰  
محمدی مطلق، محمدرضا، ۷۴  
محمود زاده وزیری، اسدالله، ۳۰، ۶۲، ۷۴، ۹۴  
محمودآبادی، زهرا، ۱۰

- مختوایی، حدیث، ۱۸  
مسیب، نسیم، ۳۹  
مقدادی، اقدس، ۲۶  
میرحسینی عالیزمینی، سید مهدی، ۵۰  
نژادحسین، سعید، ۷۰  
هادی نژاد، محسن، ۹۴  
هاشمی مهنه، حامد، ۱۴  
پامرغی، الهه، ۷۴  
پرتانیان، محمدعلی، ۸۲  
پرهام، غلامعلی، ۴۲  
کاظمی، مهدی، ۷۸  
کریمی، زهرا، ۸۶  
کنزی، نادر، ۱۸

سخنرانی‌ها

## توسعه روش تخصیص خطی در روش‌های تصمیم‌گیری

مهدی رنجبر تقی آباد\* و سهراب عفتی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
m.ranjbart@gmail.com s-effati@um.ac.ir

چکیده. برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه روش‌های بسیاری وجود دارد که یکی از آنها روش تخصیص خطی می‌باشد. در این مقاله هدف توسعه این روش در مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه و معرفی روش تخصیص درجه دوم که در نهایت تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم صفر و یک می‌شود، می‌باشد. در پایان با ارائه یک مثال ارجح بودن روش پیشنهادی جدید را نسبت به روش تخصیص خطی بررسی می‌کنیم.

### ۱. مقدمه

برای رسیدن به یک تصمیم بهینه یا مطلوب بسته به نوع مسئله روش‌های متعددی پیشنهاد شده است، از جمله ساده‌ترین نوع مسائل در این زمینه مدل‌های کلاسیک ساده مانند مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌باشند که در آنها تصمیم‌گیری تنها بر اساس یک هدف کمی صورت می‌گیرد. در حالت پیچیده‌تر در یک فرایند تصمیم‌گیری به جای یک معیار ممکن است به دنبال بهینه کردن چندین معیار به صورت‌های کمی یا کیفی باشیم، بدیهی است این معیارها به خاطر داشتن مقیاس‌ها و اهداف مختلف قابل مقایسه نبوده و فرایند تصمیم‌گیری را مشکل می‌سازد، بنابراین در تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه معمولاً به دنبال گزینه‌ای هستیم که بیشترین مطلوبیت را برای تمامی معیارها تا حد امکان داشته باشد. در مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره چنانچه تصمیم‌گیری بر مبنای چند هدف صورت گیرد آنرا تصمیم‌گیری چند هدفه، اما در صورتی که بر اساس چند شاخص انجام پذیرد آن را تصمیم‌گیری چند شاخصه می‌نامیم. در این مقاله هدف ما استفاده از تصمیم‌گیری چند شاخصه برای رتبه‌بندی گزینه‌ها است. مدل چند شاخصه معمولاً به

---

واژگان کلیدی. تصمیم‌گیری چند شاخصه، تخصیص درجه دوم، برنامه‌ریزی صفر و یک.  
\* سخنران

صورت یک ماتریس تصمیم‌گیری در جدول ۱ فرمول بندی می‌گردد، که در آن  $A_n, \dots, A_2, A_1$  گزینه‌های تصمیم‌گیری و  $x_m, \dots, x_2, x_1$  نشان دهنده  $m$  شاخص می‌باشد، که برای انتخاب گزینه‌های تصمیم به کار گرفته می‌شود که می‌تواند به صورت کمی یا کیفی باشند. عناصر  $d_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ ) نیز بیانگر مقادیر شاخص  $j$ -ام برای گزینه  $i$ -ام می‌باشد.

جدول ۱: ماتریس تصمیم‌گیری در تصمیم‌گیری چند شاخصه.

گزینه / شاخص	$x_m$	$\dots$	$x_2$	$x_1$
$A_1$	$d_{1m}$	$\dots$	$d_{12}$	$d_{11}$
$A_2$	$d_{2m}$	$\dots$	$d_{22}$	$d_{21}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_n$	$d_{nm}$	$\dots$	$d_{n2}$	$d_{n1}$

در فضای تصمیم‌گیری صاحب نظرانی چون سایمون، سیرت، مینتزیبرگ، ساعتی و ...، همگی بر آنند تا راهی برای تصمیم‌گیری صحیح‌تر و مبنی بر پایه‌های علمی و عقلایی برای مدیران فراهم آورند (ببینید [۵، ۱، ۲، ۴]). تنوع روش‌های مختلف در حل مسائل تصمیم‌گیری زیاد می‌باشد، که هر کدام از آنها با تصمیمات خاصی مانند، ارزیابی، اولویت‌گذاری و یا انتخاب بهترین گزینه، تصمیم‌گیری را انجام می‌دهند. در این مقاله هدف توسعه دادن روش تخصیص خطی به تخصیص درجه دوم برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه می‌باشد. در راستای این هدف به یک مسئله برنامه ریزی صفر و یک درجه دوم برخورد می‌کنیم، که برای حل آن یک مدل شبکه عصبی با استفاده از توابع مکمل غیر خطی استفاده می‌شود (ببینید [۳]).

## ۲. روش تخصیص درجه دوم در مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه

در روش تخصیص خطی با استفاده از اولویت هر یک از گزینه‌ها در هر یک از شاخص‌ها، به یک مدل برنامه ریزی خطی ۱-۰ دست خواهیم یافت که با حل آن می‌توان رتبه بندی گزینه‌ها را انجام داد. در روش تخصیص خطی درجه دوم اولویت هر یک از گزینه‌ها در هر یک از شاخص‌ها نسبت به گزینه‌های دیگر را نیز در تعیین رتبه بندی گزینه‌ها دخالت می‌دهیم. در این روش نیاز به اهمیت نسبی هر شاخص به عنوان یک بردار وزن داریم. در اکثر روش‌های تصمیم‌گیری نیاز به ماتریس تصمیم‌گیری  $D$  که در جدول ۱ نشان داده شد و بردار  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  که ضرائب اهمیت شاخص‌ها را بیان می‌کند، داریم. با توجه به توضیحات داده شده، مراحل روش تخصیص درجه دوم برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

- مرحله اول: با توجه به اطلاعات موجود ماتریس تصمیم‌گیری را همانند جدول ۱ تشکیل داده و سپس بردار وزن مربوط به ویژگی‌های آن را مشخص می‌کنیم.



- مرحله دوم: در این مرحله با استفاده از ماتریس تصمیم گیری در مرحله قبل، ماتریسی تشکیل می دهیم که سطرهای آن بیانگر رتبه ها و ستون های آن بیانگر شاخص ها باشد. با توجه به رتبه هر گزینه در هر شاخص، مولفه های این ماتریس را با گزینه های مربوطه پر می کنیم. این مرحله را رتبه بندی گزینه ها می نامیم.
- مرحله سوم: در این مرحله یک ماتریس وابسته به بردار وزن شاخص ها، با توجه به ماتریس رتبه بندی در مرحله دوم تشکیل می دهیم. در ماتریس روش تخصیص خطی  $(\Gamma_{n \times n})$  که سطرهای آن، گزینه و ستون های آن، رتبه می باشد، مولفه های آن از مجموع وزن هایی بدست می آید که آن گزینه با توجه به آن شاخص حاصل کرده است، یعنی هر مولفه این ماتریس مانند  $\gamma_{it}$ ، برای  $t = 1, 2, \dots, n$  و  $i = 1, 2, \dots, n$  به صورت  $\gamma_{it} = \sum_{j=1}^m \pi_{itj} w_j$  بدست می آید. که در آن  $\pi_{itj}$  برابر با یک می باشد، اگر در شاخص  $j$ -ام گزینه  $i$ -ام در رتبه  $t$ -ام باشد، در غیر این صورت مقدار آن صفر در نظر گرفته می شود. اما از آنجاییکه اولویت هر یک از گزینه ها در هر یک از شاخص ها به تنهایی نمی تواند معیار خوبی برای رتبه بندی گزینه ها باشد، در این مقاله ماتریس پیشنهادی را معرفی کرده که به کمک آن می توان معیار های بیشتری را برای رتبه بندی کالاها در نظر گرفت. در ماتریس پیشنهادی  $(\Lambda_{n^2 \times n^2})$  سطرهای آن، گزینه ها در رتبه های مختلف و ستون های آن، نیز گزینه ها در رتبه های مختلف می باشند، مولفه های این ماتریس از مجموع وزن هایی بدست می آید که آن گزینه در رتبه قرار گرفته، نسبت به رتبه گزینه های دیگر دارد. یعنی هر مولفه این ماتریس مانند  $\lambda_{itkl} = \sum_{j=1}^m \pi_{itklj} w_j$  برای  $i, t, k, l = 1, 2, \dots, n$  به صورت  $\lambda_{itkl}$  بدست می آید. که در آن  $\pi_{itklj}$ ، برابر با یک می باشد اگر در شاخص  $j$ -ام، گزینه  $i$ -ام در رتبه  $t$ -ام و گزینه  $k$ -ام در رتبه  $l$ -ام باشد، در غیر این صورت مقدار آن برابر صفر در نظر گرفته می شود.
- مرحله چهارم: در این مرحله با توجه به مولفه های ماتریس  $(\Lambda_{n^2 \times n^2})$ ، یک مسئله بهینه سازی تخصیص با تابع هدف درجه دوم به صورت زیر تشکیل داده، که با حل آن می توان رتبه بندی گزینه ها را انجام دهیم.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } x^T \Lambda x \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{t=1}^n x_{it} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn})^T \in \{0, 1\}^{n \times n}
 \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن اگر  $x_{it} = 1$ ، یعنی گزینه  $i$ -ام در رتبه  $t$ -ام قرار می گیرد، در غیر این صورت یعنی اگر  $x_{it} = 0$ ، بدین معنی است که گزینه  $i$ -ام در رتبه  $t$ -ام قرار نمی گیرد.

حال در این قسمت با ارائه یک مثال ارجحیت روش پیشنهادی را نسبت به روش تخصیص خطی بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲. ماتریس تصمیم‌گیری در جدول ۲ را با ۴ گزینه و ۶ شاخص در نظر بگیرید. اگر از نظر تصمیم‌گیرنده اهمیت شاخص‌ها به صورت  $w = (0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3)$  در نظر گرفته شود، رتبه بندی گزینه‌ها را به کمک روش تخصیص خطی و درجه دوم انجام دهید.

جدول ۲: ماتریس تصمیم‌گیری برای ۴ گزینه با ۶ ویژگی برای مثال ۱.۲.

گزینه / شاخص	$x_1^+$	$x_2^+$	$x_3^+$	$x_4^-$	$x_5^+$	$x_6^+$
$A_1$	2	1500	20000	9	5	9
$A_2$	2.2	2700	18000	7	1	5
$A_3$	1.8	2000	21000	3	7	7
$A_4$	2.5	1800	20000	5	3	5

حل این مسئله با توجه به روش تخصیص خطی، دو جواب به شکل زیر با مقدار تابع هدف یکسان  $z_1^* = z_2^* = 2$  را به ما می‌دهد:

$$x_1^* = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T,$$

$$x_2^* = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T,$$

که اولی نشان دهنده این است که  $A_3$  در رتبه اول،  $A_1$  در رتبه دوم،  $A_4$  در رتبه سوم و  $A_2$  در رتبه چهارم هستند، و دومی نشان دهنده این است که  $A_1$  در رتبه اول،  $A_3$  در رتبه دوم،  $A_4$  در رتبه سوم و  $A_2$  در رتبه چهارم هستند. حال با حل مسئله به کمک روش پیشنهادی، جواب بهینه تنها یک گزینه می‌باشد که برابر است با:

$$x^* = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T,$$

بنابراین به کمک روش تخصیص درجه دوم می‌توان ابهام موجود در روش تخصیص خطی را از میان برداشت و رتبه بندی گزینه‌های موجود را با توجه به اطلاعات بیشتر انجام داد.

### مراجع

1. R. M. Cyert and J. G. March, *A behavioral theory of the firm*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.
2. H. Mintzberg, *Managers not MBAs: A Hard Look at the Soft Practice of Managing and Management Development*. San Francisco: Berrett-Koehler, 2004.
3. M. Ranjbar, S. Effati and S. M. Miri, *An artificial neural network for solving quadratic zero-one programming problems*. Neurocomputing, **235** (2017), 192–198.
4. T. L. Saaty, *Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary*. European Journal of Operational Research **145** (2003), no. 1, 85–91.
5. H. A. Simon, *The new science of management decision*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1977.

## مسائل کنترل بهینه تصادفی تنظیم‌کننده‌های خطی درجه دوم با فرایند پخش جهشی

محمدحسین فتوحی بافقی\* و سهراب عفتی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
mohammadhossein.fotoohibafghi@mail.um.ac.ir  
s-effati@um.ac.ir

چکیده. در حل مسائل کنترل بهینه تصادفی همواره محققین به دنبال روش‌هایی هستند که شرایط لازم و حتی کافی به منظور بهینگی این مسائل را نتیجه دهد که به عنوان مثال می‌توان روش همیلتونین-ژاکوبی-بلمن را نام برد. یکی از پرکاربردترین مسائل کنترل بهینه تصادفی، تنظیم‌کننده‌های خطی می‌باشند که کاربردهای فراوانی در ریاضیات مالی و مهندسی مدرن دارند. در این گونه مسائل، سیستم مورد بررسی به فرم خطی به همراه یک جمله تصادفی و تابع عملکرد به فرم درجه دوم می‌باشد. جمله تصادفی معمولاً یک حرکت براونی و یا در حالت کلی یک فرایند لوی می‌باشد. در این پژوهش مسائل تنظیم‌کننده‌های خطی به همراه یک فرایند پخش جهشی بررسی و شرایط لازم برای بهینگی این مسائل ارایه می‌گردد.

### ۱. مقدمه

مسائل تنظیم‌کننده‌های خطی درجه دوم LQR کاربردهای فراوانی در علوم مختلف، به ویژه مهندسی مدرن و ریاضیات مالی دارند. جدیداً سیستم‌های تصادفی در مسائل تنظیم‌کننده‌های خطی درجه دوم مورد توجه بسیاری محققان قرار گرفته است. در این‌گونه مسائل سیستم مورد مطالعه به فرم

$$dx = [A(t)x(t) + B(t)u(t)] dt + V(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, (1.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. تنظیم‌کننده‌های خطی درجه دوم، فرایند پخش جهشی، فرایند لوی، کنترل بهینه تصادفی.  
\* سخنران

با شرط اولیه  $x(t_0) = x_0$  می‌باشد. ماتریس‌های  $A(t)$  و  $B(t)$  با درایه‌های پیوسته و  $V$  یک ترم تصادفی و معمولاً یک حرکت براونی و در حالت کلی‌تر یک فرایند لوی می‌باشد. تابع عملکرد نیز برای این مسایل به فرم زیر می‌باشد.

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)M(t)x(t) + u^T(t)N(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f)D(t_f)x(t_f). \quad (2.1)$$

که در آن ماتریس‌های  $M(t)$  و  $N(t)$  متقارن و به ترتیب نیمه‌معین مثبت و معین مثبت می‌باشند. در حل مسایل کنترل بهینه تصادفی LQR همواره آرایه روش‌هایی که شرایط لازم و کافی جهت بهینگی را نتیجه دهد، مد نظر می‌باشد که به عنوان مثال می‌توان از روش همیلتونین-زاکوبی-بلمن [۱] و اصل ماکزیمیم پنگ [۳] نام برد. اخیراً برخی از محققان توجه خود را بر روی فرایندهای پخش جهشی که خود یک فرایند لوی می‌باشد معطوف نموده‌اند که می‌توان از [۴] و [۲] نام برد. در این مقاله مساله کنترل بهینه تصادفی با فرایندپخش جهشی بررسی و شرایط لازم برای بهینگی آن مطرح می‌گردد. سیستم تصادفی مورد مطالعه به فرم زیر می‌باشد.

$$dx = [A(t)x(t) + B(t)u(t)] dt + \sigma(t)(t, x(t), u(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x(t), u(t), z), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (3.1)$$

که در آن  $W(t)$  یک حرکت براونی استاندارد و ترم آخر یک فرایند پخش جهشی می‌باشد.

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

حل مسایل کنترل بهینه تصادفی با فرایند پخش جهشی همواره یکی از مسایل پیچیده و دشوار بوده که مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. یکی از پرکاربردترین مسایل کنترل بهینه تصادفی مسایل LQR می‌باشد که در این مقاله مسایل با فرایند پخش جهشی مورد قرار گرفته و شرایط لازم برای بهینگی آن‌ها بررسی می‌گردد.

## سپاس‌گزاری

در پایان مراتب سپاس و عمیق‌ترین قدردانی خویش را از سر صدق و اخلاص به محضر استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر سهراب عفتی، که همواره از راهنمایی و کمک‌های بی‌دریغشان بهره بردم، ابراز می‌نمایم. هم‌چنین از تمامی اساتید کنترل به‌ویژه آقایان دکتر وحیدیان کامیاد، دکتر کرباسچی و دکتر دلاور که در طول دوران تحصیل افتخار شاگردی آن‌ها را داشتم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

## مراجع

1. W.H.Fleming and R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
2. N.C. Framstad, B. Øksendal and A. Øksendal, *Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance*, Journal of Optimization Theory and Applications. **121** (2004), no. 1, 77–98.
3. S. Peng, *A general stochastic maximum principle for optimal control problems*, SIAM J. Control & Optim. 28 (1990), 966–979.
4. H. Tang and Z. Wu, *Stochastic Differential Equations and Stochastic Linear Quadratic Optimal Control Problem with L'evy Processes*, Journal System Science and Complexity.(2009), Vol. 22, 122–136.

## روش گرادیان مزدوج فلچر-ریوز طیفی-نوع، برای مینیمم‌سازی توابع محدب ناهموار

زهرا محمودآبادی\* و علیرضا دعاگویی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان  
mahmoudabadi.zahra@gmail.com  
doagooei@uk.ac.ir

چکیده. روش‌های گرادیان مزدوج، روش‌هایی کارآمد برای مسائل بهینه‌سازی هموار هستند، درحالی‌که استفاده از روش‌های گرادیان مزدوج برای حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار، کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش، یک روش گرادیان مزدوج طیفی-نوع با قاعده‌ی  $SVFR$ ، برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار ارائه می‌دهیم، که همواره جهت‌های کاهشی تولید می‌کند. با استفاده‌ی تمام و کمال از خواص پوشش ماریو-یوشیدا، یک روش گرادیان مزدوج طیفی-نوع برای مسائل مینیمم‌سازی محدب ناهموار، ارائه می‌دهیم که در آن از یک جستجوی خطی جدید، برای تقریب پوشش ماریو-یوشیدا استفاده می‌شود. همچنین خواهیم دید که این الگوریتم نیز تحت شرایطی مناسب، همگرایی سراسری است.

### ۱. مقدمه

مباحث فراوانی از موضوعات مورد مطالعه در زمینه‌های مختلف و تحقیقات علمی وجود دارند که می‌توان آن‌ها را به‌صورت مسائل بهینه‌سازی نامقید، قالب‌بندی کرد. از این رو، یافتن روش‌هایی برای حل این نوع مسائل، بسیار مهم و مورد توجه می‌باشد. یکی از کاربردی‌ترین روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی نامقید، روش گرادیان مزدوج است. از جمله انواع مهم مسائل بهینه‌سازی نامقید غیرخطی، مسأله‌ی بهینه‌سازی هموار است. یک تابع که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد را تابعی هموار گویند و مسأله‌ی بهینه‌سازی نامقید غیرخطی که تابع هدف آن هموار باشد، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی هموار نامیده می‌شود. در غیر این صورت آن را ناهموار گوئیم. در این پژوهش، توجه خود را به یک تکنیک هموارسازی معطوف می‌کنیم [۱]. در واقع، از پوشش

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. بهینه‌سازی هموار، مینیمم‌سازی محدب ناهموار، روش گرادیان مزدوج طیفی-نوع، پوشش ماریو-یوشیدا، همگرایی سراسری.  
\* سخنران

ز. محمودآبادی و ع.ر. دعاگوی

ماریو-یوشیدا، برای تبدیل مسأله‌ی ناهموار به یک مسأله‌ی هموار استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع محدب ناهموار باشد، مسأله‌ی بهینه‌سازی نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (1.1)$$

از پوشش ماریو-یوشیدا، برای تبدیل مسأله‌ی ناهموار (1.1)، به یک مسأله‌ی هموار به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x), \quad (2.1)$$

که در آن تابع  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، پوشش ماریو-یوشیدای  $f$  است و چنین تعریف می‌شود:

تعریف 1.1. فرض کنید  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی محدب است. آن‌گاه تابع هموار  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، که برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  به صورت زیر تعریف می‌شود را یک پوشش ماریو-یوشیدای تابع  $f$  می‌گویند:

$$\varphi(x) := \min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \right\}, \quad (3.1)$$

که در آن  $\lambda$  یک ثابت حقیقی مثبت است.

اکنون فرض کنید  $h_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  و هر  $\lambda > 0$ ، به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$h_x(z) := f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

آن‌گاه، تابع  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود را عملگر تقریبی ماریو-یوشیدای  $f$  می‌نامند:

$$p(x) := \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} h_x(z). \quad (5.1)$$

به وضوح، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\varphi(x) = f(p(x)) + \frac{1}{2\lambda} \|p(x) - x\|^2. \quad (6.1)$$

تابع  $\varphi$  مشتق‌پذیر است (حتی وقتی  $f$  مشتق‌پذیر نباشد)، و گرادیان آن برابر است با:

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} (x - p(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (7.1)$$

در این پژوهش، یک روش گرادیان مزدوج برای مینیمم‌سازی پوشش ماریو-یوشیدای  $f$  یعنی  $\varphi$  ارائه داده می‌شود، این روش از یک جستجوی خطی جدید برای تقریب مقدار تابع  $\varphi$ ، به جای مقدار دقیق آن استفاده می‌کند. در واقع، روی یک روش فلچر-ریوز طیفی-نوع متمرکز می‌شویم که برگرفته از یک روش گرادیان مزدوج کاهشی است، برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید هموار، پیشنهاد شده است. ما نشان می‌دهیم که این روش تحت شرایط مناسب، همگرای سراسری است.

به این نکته توجه داشته باشید که در این روش نیازی نیست تابع هدف  $f$ ، قویاً محدب باشد. می‌دانیم با داشتن  $p$  می‌توان  $\varphi$  و  $g$  را به‌دست آورد. اما معمولاً به‌دست آوردن  $p$ ، دشوار و یا حتی غیرممکن است. برای رفع این مشکل، تابع  $p$  را برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  تقریب می‌زنیم، در حقیقت برای هر  $\varepsilon > 0$ ، یک بردار  $p^a(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$  وجود دارد به‌طوری‌که:

$$f(p^a(x, \varepsilon)) + \frac{1}{2\lambda} \|p^a(x, \varepsilon) - x\|^2 \leq \varphi(x) + \varepsilon. \quad (8.1)$$

که در آن اندیس بالایی  $a$ ، به‌معنی تقریب است و  $\varepsilon$  محدوده‌ی تقریب را مشخص می‌کند. از روش الگوریتم برش صفحه‌ای [۲]، برای به‌دست آوردن نقطه  $p^a(x, \varepsilon)$  در تابع

$$\varphi^a(x, \varepsilon) := f(p^a(x, \varepsilon)) + \frac{1}{2\lambda} \|p^a(x, \varepsilon) - x\|^2 \quad (9.1)$$

استفاده می‌کنیم.

## ۲. الگوریتم فلچر-ریوز طیفی-نوع

در این بخش، بر اساس ایده‌ای از [۳]، یک روش گرادیان مزدوج طیفی-نوع فلچر-ریوز (SVFR)، برای حل مسأله‌ی (۱.۱) ارائه می‌دهیم. در این روش، جهت  $d_k$  به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$d_k := \begin{cases} -g^a(x_k, \varepsilon_k), & k = 0, \\ -\theta_k g^a(x_k, \varepsilon_k) + \beta_k^{\text{SVFR}} d_{k-1}, & k \geq 1, \end{cases} \quad (1.2)$$

که در آن:

$$\beta_k^{\text{SVFR}} := \frac{\|g^a(x_k, \varepsilon_k)\| |\langle g^a(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}), g^a(x_k, \varepsilon_k) \rangle|}{\|g^a(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1})\|^3}, \quad (2.2)$$

و

$$\theta_k := \frac{|\langle d_{k-1}, g^a(x_k, \varepsilon_k) \rangle| - \langle d_{k-1}, g^a(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}) \rangle}{\|g^a(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1})\|^2}. \quad (3.2)$$

حال می‌توان الگوریتم فلچر-ریوز طیفی-نوع (SVFR) را برای حل مسأله‌ی (۲.۱) و در نتیجه (۱.۱)، بیان کرد:

---

### (الگوریتم SVFR-نوع، برای مسائل ناهموار محدب)

---

ورودی. ثابت‌های  $\rho \in (0, 1)$  و  $\sigma_2 > 0$  و همچنین نقطه‌ی اولیه‌ی  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  و  $\varepsilon_0 > 0$  را انتخاب کنید. قرار دهید  $k := 0$ . خروجی. نقطه  $p^a(x, \varepsilon)$ .



ز. محمودآبادی و ع.ر. دعاگوئی

گام ۱. بردار  $p^a(x_k, \varepsilon_k)$  را طبق الگوریتم روش برش صفحه ای به دست آورید و با استفاده از آن، بردار  $g^a(x_k, \varepsilon_k)$  و سپس  $d_k$  را محاسبه کنید.

گام ۲.  $\varepsilon_{k+1}$  را طوری انتخاب کنید که:

$$0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k.$$

گام ۳. (جستجوی خطی). قرار دهید  $\alpha_k := \rho^{i_k}$  و  $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$  به طوری که در آن  $i_k$  کوچکترین عدد صحیح نامنفی  $i$  باشد که:

$$\varphi^a(x_k + \rho^i d_k \varepsilon_{k+1}) \varphi^a(x_k, \varepsilon_k) + \sigma_1 \rho^i \langle d_k, g^a(x_k, \varepsilon_k) \rangle - \sigma_2 \rho^{2i} \|d_k\|^2 + \varepsilon_k.$$

گام ۴. قرار دهید  $k := k + 1$ ، و به گام ۱ بازگردید.

پایان.

مثال ۱۰۲. فرض کنید تابع  $f(x) = |x|$  روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده باشد، آنگاه واضح است که  $f$  یک تابع محدب، سره است. همچنین  $f$  یک تابع ناهموار می باشد. زیرا مشتق آن در نقطه‌ی صفر، ناپیوستگی دارد (در نقطه‌ی صفر مشتق پذیر نیست). مسأله‌ی

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = |x|$$

$p(x_2) = 0$ ، نقطه‌ی بهین مسأله می باشد.

۳. دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش، همگرایی سراسری الگوریتم، تحت فرض ۲ که از دو شرط  $A1$  و  $A2$  تشکیل شده است، به صورت زیر تضمین می شود [۱]:

فرض ۲:

$A1$ : تابع  $f$  از پایین کران دار باشد.

$A2$ : مجموعه‌ی  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < \varphi(x_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\}$  کران دار باشد.

مراجع

1. Q. Li, *A spectral-type conjugate gradient method for nonsmooth convex minimization*, Advanced Modeling and Optimization, Vol. 14 (2012), 147-158.
2. M. Fukushima, *descent algorithm for nonsmooth convex optimization*, Mathematical Programming, vol. 30 (1984), 163-175.
3. A. Lu, H. Liu, X. Zheng and W., Cong, *A variant spectral-type FR conjugate gradient method and its global convergence*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 217 (2011), 5547-5552.

## کنترل بهینه چند مقداری برای سیستم اکسیژن‌ساز کپسول زیستی

سیدحامد هاشمی مهنه\*

گروه سیستم‌های هوایی، پژوهشکده علوم و فناوری هوایی، پژوهشگاه هوافضا  
hmehne@ari.ac.ir

چکیده. در مقاله حاضر، طراحی کنترلر بهینه حلقه باز برای سیستم اکسیژن‌ساز کپسول زیستی مطرح و بررسی می‌شود. سرعت فن‌های سیستم به عنوان یک تابع ورودی چند مقداری برای کنترل کارکرد سیستم استفاده شده است. طراحی کنترلر بهینه با هدف کمینه توان الکتریکی مصرفی سیستم با رعایت قیود محیطی، به یک مساله کنترل بهینه مقید منجر می‌شود. مساله در نهایت به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی مدلسازی و حل می‌شود. نتایج برای حالت‌های مورد نظر با نتایج حالتی که کنترلر از نوع خاموش-روشن است مقایسه شده و حاکی از بهبود شرایط در حالت کنترلر چند مقداری است.

### ۱. مقدمه

تامین اکسیژن و حذف دی‌اکسید کربن یکی از الزامات کپسول‌های زیستی حامل موجود زنده در سفرهای فضایی است. در کاوشگرهای فضایی پژوهش و پیشگام از یک اکسیژن‌ساز گرانولی که توسط پژوهشگاه هوافضا طراحی و تولید شده است، استفاده شده بود ([۱]). در این سیستم، گرانول‌های پراکساید سدیم با دی‌اکسید کربن حاصل از بازدم موجود زنده واکنش انجام داده و در اثر آن اکسیژن آزاد می‌شود که این اکسیژن مجدداً توسط موجود زنده مصرف می‌شود. این سیستم از نظر فیزیکی متشکل از سه استوانه توخالی تو در تو است که استوانه داخلی در بالا و پایین دارای دو عدد فن است که عمل مکش هوا به داخلی سیستم و تزریق هوای پاک به کپسول را برعهده دارند. در ماموریت‌های قبلی، سیستم اکسیژن‌ساز از دقایقی قبل از ماموریت روشن

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49J15; Secondary 49J15, 93C55, 90C05.

واژگان کلیدی. کنترل بهینه، برنامه ریزی خطی، سیستم دینامیکی.  
\* سخنران

شده و تا پایان آن روشن می‌ماند. این امر علاوه بر مصرف زیاد توان الکتریکی باعث تولید بیش از حد اکسیژن و افزایش دما و فشار در کپسول می‌شد. بنابراین، چنانچه بتوان سیستم را با خاموش و روشن کردن فن‌ها به گونه‌ای کنترل کرد که علاوه بر کمینه شدن توان مصرفی، شرایط محیطی حاکم را نیز در محدوده مطلوب نگه داشت، می‌توان در ماموریت‌های آتی، وزن سیستم تغذیه و در نتیجه هزینه را کاهش داد و در عوض به وزن محموله افزود. به همین منظور تحقیقاتی انجام شده که در مرجع [۲] گزارش شده است. در این رویکرد کنترلر به صورت خاموش-روشن طراحی شده که طی آن، در ازای رعایت سقف  $p.p.m$  ۵۰۰۰ حدود ۱۵ درصد از مصرف توان الکتریکی کاسته شده است.

هدف این مقاله استفاده از کنترلر چند مقداری به جای کنترلر خاموش-روشن است تا بتواند سرعت فن را به گونه‌ای تنظیم کند که علاوه بر مصرف کمینه توان الکتریکی، قیود شرایط محیطی نیز حفظ شود. انتظار داریم این نوع کنترلر به مصرف توان کمتر و شرایط محیطی مطلوب‌تری منجر شود. علاوه بر این، مساله برنامه‌ریزی خطی حاصل از نظر محاسباتی پیچیدگی کمتری خواهد داشت.

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

با فرض اینکه موتور DC استفاده شده به عنوان فن سیستم اکسیژن‌ساز دارای گشتاور ثابت باشد، می‌توان آن را با تغییر ولتاژ کنترل کرد. طبق مرجع [۳] سیستم دینامیک حاکم بر مساله با کنترل دو مقداری  $u(t) \in \{0, 1\}$  به صورت زیر است:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.2)$$

این معادله را می‌توان برای حالتی که تابع کنترل به صورت چند مقداری تعریف شده نیز بکاربرد که در آن،  $u(t)$  تابع کنترل حاصل یک‌ساز ولتاژ با تقسیم ولتاژ اعمالی بر ولتاژ نامی است یعنی  $u(t) = v(t)/v_{max}$ ،  $y(t)$  تابع برداری پاسخ مدل و متشکل از ۵ مولفه اکسیژن، دی اکسیدکربن، دما، رطوبت و فشار کپسول زیستی است. همچنین ماتریس‌های ضرایب  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  ثابت هستند.

هدف مساله، کمینه‌سازی یک ترکیب وزنی از ولتاژهای اعمالی شده به صورت

$$\sum_{t=0}^N r(t)u(t). \quad (3.2)$$

تحت قیود برداری زیر است:

$$y_{min} \leq y(t) \leq y_{max}, \quad (4.2)$$

که در آن،  $y_{max}$  و  $y_{min}$  بردارهایی هستند که به ترتیب کران‌های پایین و بالای مقدار مجاز اکسیژن، دی اکسیدکربن، دما، رطوبت و فشار کپسول را در بردارند. با شروع از یک مقدار

جدول ۱: مقدار پارامترهای در حل مساله

اکسیژن دی اکسید کربن	رطوبت	دما	فشار
۵۰۰	۵	۲۸	۸۷۰
۲۵۰۰	۳۰	۴۸	۹۳۵
۱۰۰۰	۱۶	۲۹	۸۹۰

اولیه و معلوم  $y_0$  و استفاده از رویکرد بازگشتی [۴]، مساله برنامه ریزی خطی زیر حاصل می‌شود

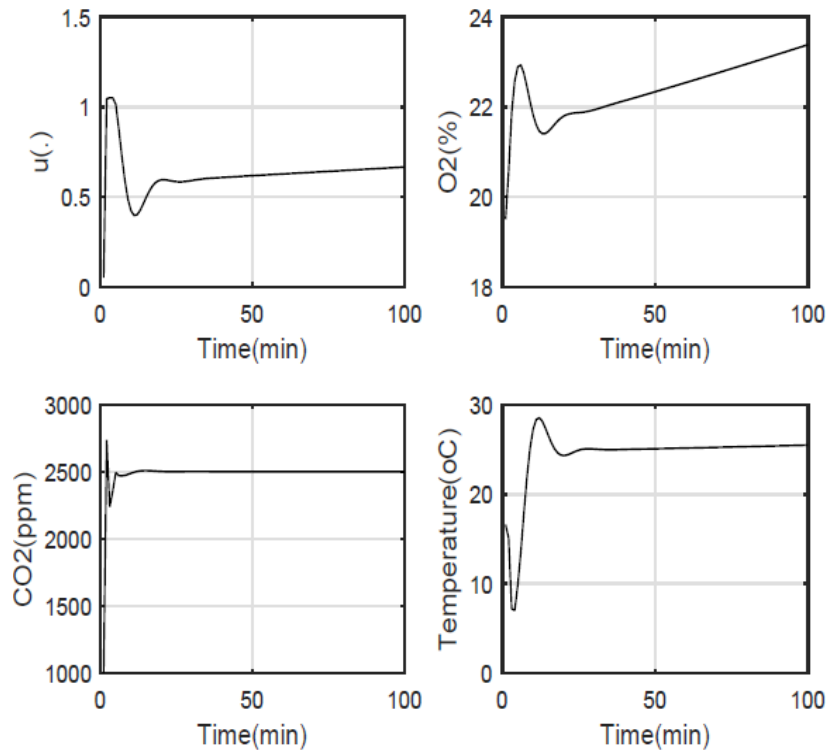
$$\begin{aligned} & \min \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \\ & \text{s.t.} \\ & L\mathbf{u} \leq W \end{aligned} \quad (5.2)$$

از حل این مساله می‌توان مقدار تابع کنترل بهینه را در هر زمان  $t$  بدست آورد و به فن‌ها اعمال کرد.

به عنوان نمونه، مساله را برای  $T = 100$  دقیقه،  $\mathbf{r} = 1$  و داده‌های جدول ۱ حل کردیم. نتایج شامل تابع کنترل بهینه و سه پاسخ سیستم به آن، در شکل ۱ نمایش داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، مقدار دی اکسید کربن در محدوده  $250^\circ \text{p.p.m}$  مانده است و اکسیژن و دما نیز در محدوده مطلوب هستند در حالی که اکسیژن‌ساز با تمام توان خود کار نکرده است. مقدار تابع هدف بهینه برابر با  $59,41$  بدست آمده که در مقایسه با حالتی که سیستم با تمام توان کار می‌کند،  $40,59$  درصد منجر به کاهش مصرف توان الکتریکی شده است.

### مراجع

۱. خ. جوادی، ر. ذاکری، م.ر. سلیمی، م. شیدا و م. ابراهیمی، طراحی و ساخت سیستم اکسیژن‌ساز محموله کاوشگر ۶، گزارش فنی، پژوهشگاه هوافضا، شماره مدرک ۱۶۰-۹۱-۹۴۴-۱۳۹۲.
۲. س.ح. هاشمی مهنه، مدلسازی سیستم دینامیکی و طراحی کنترلر برای اکسیژن‌ساز کپسول زیستی، گزارش فنی، پژوهشگاه هوافضا، ۱۳۹۶.
3. H. H. Mehne, *Identification and control of an oxygen providing system*, to appear in Cogent Engineering.
4. T. Boom, *Discrete-time systems analysis*, Additional Lecture Notes for the course SC4090, 2006.



شکل ۱: کنترل بهینه و پاسخ‌های سیستم ( اکسیژن، دی اکسید کربن و دما) .

## شرایط لازم و کافی M-ایستائی برای مسائل بهینه‌سازی تعادلی ناهموار

حدیث مختوایی<sup>1\*</sup>، عقیله حیدری<sup>2</sup>، و نادر کنزی<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام‌نور مشهد

hadismokhtavay@yahoo.com

a\_heidari@pnu.ac.ir

<sup>3</sup> گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور تهران

nad.kanzi@gmail.com

چکیده. در این مقاله به معرفی قید تعریفی آبادی ضعیف (WACQ) برای یک مسئله بهینه‌سازی با قیود تعادلی ناهموار (MPEC) خواهیم پرداخت. سپس با به کارگیری این قید تعریفی، شرایط لازم و کافی M-ایستائی را برای یک (MPEC) ناهموار بیان خواهیم کرد.

### ۱. مقدمه و پیش‌نیازها

در این مقاله، مسئله‌ی بهینه‌سازی با قیدهای تعادلی (به طور خلاصه، MPEC) زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(P) \quad \min \quad f(x) \\ s.t. \quad G_i(x) \geq 0, \quad H_i(x) \geq 0, \quad i \in I := \{1, \dots, m\}, \\ H_i(x)G_i(x) = 0, \quad i \in I,$$

که  $f$  و  $G_i$  و  $H_i$  ها (برای هر  $i \in I$ ) توابع موضعا لیب شیتری هستند که از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}$  تعریف شده‌اند. مجموعه‌ی موجه مسئله‌ی (P) را با  $S$  نمایش می‌دهیم:

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. شرایط ایستائی، قیدتعریفی، بهینه‌سازی ناهموار، زیرمشتق کلارک.  
\* سخنران

ح. مختوایی، ع. حیدری، و ن. کنزی

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid H_i(x) \geq 0, G_i(x) \geq 0, \quad H_i(x)G_i(x) = 0, \quad \forall i \in I\}.$$

(MPEC) از دشوارترین مسائل بهینه‌سازی هستند. یکی از دلایل دشواری خاص این مسائل آن است که حتی اگر تمام توابع  $H_i$  و  $G_i$  محدب باشند، دلیلی ندارد که  $S$  محدب باشد (چون که الزامی برای تحدب  $H_i G_i$  وجود ندارد). به دلیل پیچیدگی خاص مجموعه‌ی  $S$ ، اکثر منابع موجود، توابع  $H_i$  و  $G_i$  هارا مشتق‌پذیر در نظر می‌گیرند (به منابع [۱] و [۳] و [۴] و مراجعشان رجوع شود)، البته منابعی از جمله [۵] نیز توابع را ناهموار در نظر گرفته‌اند، که ناچار شده‌اند فرض‌های پر تکلف دیگری را به مسئله تحمیل کنند. در این مقاله، ما بدون در نظر گرفتن آن شرط‌های محدودکننده، به بیان شرایط ایستائی یک (MPEC) غیرهموار در نقاط بهینه‌ی آن خواهیم پرداخت. از آنجاییکه یکی از پرکاربردترین شرایط ایستائی، شرط M-ایستائی است، ما نیز به تعمیم M-ایستائی برای یک (MPEC) غیرهموار متمرکز خواهیم شد. در سرتاسر این مقاله،  $\hat{x}$  را یک نقطه‌ی بهینه از مسئله‌ی (P) فرض خواهیم کرد.

برای تابع موضعاً لیپ‌شیتز  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  و نقطه‌ی  $x_0 \in \text{dom}\varphi$  زیرمشتق کلارک  $\varphi$  در  $x_0$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\partial_c \varphi(x_0) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \varphi^\circ(x_0; d) \geq \langle \xi, d \rangle \quad \forall d \in \mathbb{R}^n\}$$

که در آن  $\varphi^\circ(x; d)$  نشان‌دهنده‌ی مشتق جهت‌ی تعمیم‌یافته‌ی کلارک است:

$$\varphi^\circ(x_0; d) = \limsup_{y \rightarrow x_0, t \downarrow 0} \frac{f(y + td) - f(y)}{t}$$

برای مطالعه‌ی خواص و قضایای مربوط به این زیرمشتق، به [۲] مراجعه شود. متناسب با زیرمجموعه‌ی  $B \neq \emptyset$  از  $\mathbb{R}^n$ ، مجموعه‌های قطب و عمود بر آن، به ترتیب، چنین تعریف می‌شوند:

$$B^- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle \leq 0 \quad \forall b \in B\}$$

$$B^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle = 0 \quad \forall b \in B\}$$

همچنین کوچکترین مخروط شامل  $B$  را با  $\text{Cone}(B)$  نشان می‌دهیم.  $\bar{B}$  نشان‌دهنده‌ی بستار توپولوژیک  $B$  است.

## ۲. تعاریف و قضایای اصلی

در آغاز این فصل، نمادهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$I_1 := \{i \in I \mid G_i(\hat{x}) = 0, H_i(\hat{x}) > 0\},$$

$$I_2 := \{i \in I \mid G_i(\hat{x}) = 0, H_i(\hat{x}) = 0\},$$

$$I_3 := \{i \in I \mid G_i(\hat{x}) > 0, H_i(\hat{x}) = 0\}.$$

لم ۱.۲. یک جواب موضعی از مسئله‌ی زیر می‌باشد:

$$(P_1) \quad \min \quad f(x) \\ s.t. \quad x \in S_1 := \{G_i(x) \geq 0 \quad i \in I_1 \cup I_2; \\ H_i(x) \geq 0 \quad i \in I_2 \cup I_3; \\ G_i(x)H_i(x) = 0 \quad i \in I\}.$$

تعریف ۲.۲. می‌گوییم  $(P)$  در قید تعریفی آبادی ضعیف  $(WACQ)$  صدق می‌کند اگر  $P_1$  در قید تعریفی آبادی  $(ACQ)$  صدق کند، یعنی

$$\left( \bigcup_{i \in I_1} \partial_c G_i(\hat{x}) \right)^\perp \cap \left( \bigcup_{i \in I_3} \partial_c H_i(\hat{x}) \right)^\perp \cap \left( - \bigcup_{i \in I_2} \partial_c G_i(\hat{x}) \right)^- \\ \cap \left( - \bigcup_{i \in I_2} \partial_c H_i(\hat{x}) \right)^- \cap \{d \in \mathbb{R}^n \mid G_i^\circ(\hat{x}; d)H_i(\hat{x}; d) = 0, i \in I\} \subseteq \Gamma(S_1, \hat{x})$$

که  $\Gamma(S_1, \hat{x})$  نشان‌دهنده‌ی مخروط مماس بر  $S_1$  در نقطه‌ی  $\hat{x}$  است. و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(S, \hat{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x_k\} \subseteq S, \exists \{t_k\} \downarrow 0 : x_k \rightarrow \hat{x}, \frac{x_k - \hat{x}}{t_k} \rightarrow d\}$$

لم ۳.۲.  $(WACQ)$  از قید تعریفی آبادی برای  $(P)$  ضعیفتر است.

نکته ۴.۲. اثبات شرط لازم کاروش-کان-تاکر  $KKT$  برای  $(P)$  تحت شرط آبادی، یک روال استاندارد دارد، که شامل هیچ نکته‌ی خاصی نیست. در قضایای زیر نشان می‌دهیم که شرط لازم  $M$ -ایستائی (که مشابه شرط  $KKT$  است) تحت قید تعریفی ضعیف  $(WACQ)$  به دست می‌آید.

قضیه ۵.۲. اگر  $(P)$  در  $(WACQ)$  صدق کند، آنگاه

$$0 \in \partial_c f(\hat{x}) + \overline{Cone}(M)$$

که در آن

$$M := \left( \bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} \partial_c G_i(\hat{x}) \right) \cup \left( \bigcup_{i \in I_2 \cup I_3} \partial_c H_i(\hat{x}) \right)$$

قضیه ۶.۲. اگر  $(P)$  در  $(WACQ)$  صدق کند و  $Cone(A)$  بسته باشد، آنگاه  $\hat{x}$  در شرط  $M$ -ایستائی صدق می‌کند، یعنی ضرایب  $\lambda$  و  $\lambda_i^G$  و  $\lambda_i^H$  به گونه‌ای موجودند که:

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda_i^G \geq 0 \quad i \in I_2, \quad \lambda_i^G = 0 \quad i \in I_1, \quad \lambda_i^G \text{ free} \quad i \in I_3, \\ \lambda_i^H \geq 0 \quad i \in I_2, \quad \lambda_i^H = 0 \quad i \in I_2, \quad \lambda_i^G \text{ free} \quad i \in I_3, \quad \lambda_i^H \lambda_i^G = 0 \quad i \in I_2, \\ 0 \in \partial_c f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^m (\lambda_i^G \partial_c G_i(\hat{x}) + \lambda_i^H \partial_c H_i(\hat{x}))$$



ح. مختوایی، ع.حیدری، و ن. کنزی

با مثال‌های متعددی می‌توان نشان داد که شرط لازم ارائه شده در قضیه‌ی ۶.۲، کافی نیست. ولی قضیه‌ی زیر شرط کافی مناسب آن را تحت شرط تحدب توابع ثابت می‌کند.

قضیه ۷.۲. اگر  $\hat{x}$  در شرط  $M$ -ایستایی صدق کند، و توابع  $f$  و  $H_i$  و  $G_i$  (برای  $i \in I$ ) محدب باشند، آنگاه  $\hat{x}$  یک جواب بهینه برای  $(P)$  است.

مثال ۸.۲. مسئله غیر هموار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) = |\sin x| + y \\ \text{s.t.} \quad & G(x, y) = \max\{x, y\} \geq 0, \\ & H(x, y) = |x| - |y| \geq 0, \\ & G(x, y)H(x, y) = 0. \end{aligned}$$

با یک محاسبه ساده می‌توان دید که  $\hat{x} = (0, 0)$  جواب مسئله است و  $\Gamma(S, \hat{x}) = \mathbb{R}^2$ . پس  $(WACQ)$  در  $\hat{x}$  برقرار است. همچنین شرط  $M$ -ایستایی با انتخاب  $\lambda^G = \lambda^H = \frac{1}{2}$  برقرار می‌باشد.

### مراجع

1. L.Adam, R.Henrion, *On M-stationarity conditions in MPECs and the associated qualification conditions*, Math. Program. (2017),1-31
2. F.H.Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Willey, New York, 1983
3. U.Lei, L.Gui-Hua, *Notes on some constraint qualifications for mathematical programs with equilibrium constraints*, J. Optim. Theory Appl. **156**(2013), no. 3, 600–616
4. B.Matus, G.Helmut, *On estimating the regular normal cone to constraint systems and stationarity conditions*, Optimization, **66** (2017), no. 1, 61–92.
5. N.Movahedian, S.Nobakhtian, *Necessary and sufficient conditions for nonsmooth mathematical programs with equilibrium constraints*, Nonlinear Anal. , **72** (2010), no. 5, 2694–2705.

## اندازه‌گیری کارایی در مدل شبکه دومرحله‌ای چنددوره‌ای با وزن‌های مشترک

محمد ضمیریان<sup>۱\*</sup>، عقیله حیدری<sup>۲</sup>، و نوراله ابراهیمی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بجنورد، بجنورد، ایران  
zamirianm@yahoo.com

<sup>۲</sup> دانشگاه پیام نور واحد مشهد، گروه ریاضی، مشهد، ایران  
A\_heidari@pnu.ac.ir; ms4364@gmail.com

چکیده. تحلیل پوششی داده‌ها، روشی ناپارامتری برای سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس است که دارای ورودی و خروجی‌های چندگانه هستند. ایده وزن‌های مشترک برای اولین بار توسط کوک و همکاران (۱۹۹۰) مطرح گردید. همچنین جهانشاهلو و همکاران (۲۰۰۰ و ۲۰۰۵) با پیشنهاد نوعی مدل چندهدفه و حل آن موفق به به‌دست آوردن وزن‌های مشترک و رتبه‌بندی شدند. در این مقاله با گسترش روش‌های مذکور برای مسایل شبکه دومرحله‌ای چنددوره‌ای با ارایه وزن‌های مشترک و با استفاده از روش بهینه‌سازی چندهدفه کارایی تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده با حل یک مدل بهینه‌سازی به‌دست می‌آید.

### ۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها، روشی ناپارامتری برای سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس است که دارای ورودی و خروجی‌های چندگانه هستند. ایده وزن‌های مشترک برای اولین بار توسط کوک و همکاران [۱] مطرح گردید. همچنین جهانشاهلو و همکاران [۲، ۳] با پیشنهاد نوعی مدل چندهدفه و حل آن موفق به به‌دست آوردن وزن‌های مشترک و رتبه‌بندی شدند. در این مقاله با گسترش روش‌های مذکور برای مسایل شبکه دومرحله‌ای چنددوره‌ای با ارایه وزن‌های مشترک و با استفاده از روش بهینه‌سازی چندهدفه کارایی تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده با حل یک مدل بهینه‌سازی به‌دست می‌آید.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. تحلیل پوششی داده‌ها، شبکه دومرحله‌ای چنددوره‌ای، وزن مشترک، برنامه‌ریزی چندهدفه. \* سخنران

۲. مدل شبکه CCR دو مرحله‌ای چنددوره‌ای با وزن‌های مشترک

فرض کنید،  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده در یک دوره زمانی مشخص، شامل  $q$  دوره زمانی مجزا هستند، و برای واحد تصمیم‌گیرنده  $j$  ام،  $x_{ij}^p$ ،  $j = 1, \dots, n$ ،  $z_{ij}^p$ ،  $i = 1, \dots, m$ ،  $y_{rj}^p$ ،  $f = 1, \dots, g$ ،  $r = 1, \dots, s$ ، به ترتیب ورودی، محصولات میانی و خروجی دوره زمانی  $q$  ام،  $p = 1, \dots, q$ ، باشند، قرار می‌دهیم:

$$X_{ij} = \sum_{n=1}^p x_{ij}^p, \quad Z_{fj} = \sum_{p=1}^p z_{ij}^p, \quad Y_{rj} = \sum_{n=1}^p y_{ij}^p \quad (۱.۲)$$

مدل کسری شبکه CCR دو مرحله‌ای چنددوره‌ای به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \bar{E}_K^S = \max & \frac{\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i X_{rj}} \\ \text{s.t.} & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{f=1}^g u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i, w_f \geq \varepsilon, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, g \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

برای سنجش کارایی مدل (۲.۲) با وزن مشترک، مساله بهینه‌سازی چندهدفه زیر را بر اساس ماکزیم نمودن کارایی دو مرحله، در تمام دوره‌ها به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max & \left\{ \left\{ \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fn}^{(1)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i1}^{(1)}}, \dots, \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fn}^{(1)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{in}^{(1)}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r1}^{(1)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{f1}^{(1)}}, \dots, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rn}^{(1)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fn}^{(1)}} \right\}, \dots, \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fn}^{(q)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i1}^{(q)}}, \dots, \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fn}^{(q)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{in}^{(q)}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r1}^{(q)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{f1}^{(q)}}, \dots, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rn}^{(q)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fn}^{(q)}} \right\} \right\} \\ \text{s.t.} & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i, w_f \geq \varepsilon, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, g \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

با قرار دادن  $\bar{\theta}_{1k}^{(p)} = \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}}$  و  $\bar{\theta}_{2k}^{(p)} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}$  در مساله چند هدفه (۳.۲) مساله زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \max & Z = [\{\bar{\theta}_{11}^{(1)}, \dots, \bar{\theta}_{1n}^{(1)}, \bar{\theta}_{21}^{(1)}, \dots, \bar{\theta}_{2n}^{(1)}\}, \dots, \{\bar{\theta}_{11}^{(q)}, \dots, \bar{\theta}_{1n}^{(q)}, \bar{\theta}_{21}^{(q)}, \dots, \bar{\theta}_{2n}^{(q)}\}] \\ \text{s.t.} & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \geq \bar{\theta}_{1j}^{(p)} \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \geq \bar{\theta}_{2j}^{(p)} \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i, w_f \geq \varepsilon, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, g \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

اندازه‌گیری کارایی در مدل شبکه دومرحله‌ای چنددوره‌ای با وزن‌های مشترک

با قراردادن  $\{\bar{\theta}_{11}^{(1)}, \dots, \bar{\theta}_{1n}^{(1)}, \bar{\theta}_{21}^{(1)}, \dots, \bar{\theta}_{2n}^{(1)}\}, \dots, \{\bar{\theta}_{11}^{(q)}, \dots, \bar{\theta}_{1n}^{(q)}, \bar{\theta}_{21}^{(q)}, \dots, \bar{\theta}_{2n}^{(q)}\}$  مساله (۴.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \max \bar{\theta} \\ \text{s.t.} & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \geq \bar{\theta} \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \geq \bar{\theta} \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i, w_f \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, g \end{aligned} \quad (۵.۲)$$

برای یکتایی جواب مساله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را ارایه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max z = \sum_{j=1}^n (e_{1j}^{(p)} + e_{2j}^{(p)}) \\ \text{s.t.} & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \geq \bar{\theta}_{1j}^{(p)} \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \geq \bar{\theta}_{2j}^{(p)} \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{(p)}}{\sum_{f=1}^g w_f z_{fj}^{(p)}} \leq 1 \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\ & \bar{\theta}_{1j}^{(p)*} + (e_{1j}^{(p)}) = \bar{\theta}_{1j}^{(p)} \\ & \bar{\theta}_{2j}^{(p)*} + (e_{2j}^{(p)}) = \bar{\theta}_{2j}^{(p)} \\ & u_r, v_i, w_f \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, g \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

که در آن  $\bar{\theta}_{1j}^{(p)*}$  و  $\bar{\theta}_{2j}^{(p)*}$ ، جوابهای بهینه مساله (۵.۲) در دوره ی  $p$  ام،  $j = 1, \dots, n$ ، هستند.

**تعریف ۱.۰.۲.** بردار  $(u^*, v^*, w^*)$  با مقدار تابع هدف  $\hat{\theta}^*$  را جواب بهینه پرتو برای مساله (۵.۲) گویند، هرگاه جواب شدنی دیگری چون  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  با مقدار تابع هدف  $\bar{\theta}$  وجود نداشته باشد، به قسمی که  $\hat{\theta}^* \leq \bar{\theta}$  و  $\hat{\theta}^* \neq \bar{\theta}$ .

**قضیه ۲.۰.۲.** اگر  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  جواب بهینه به دست آمده از مدل (۶.۲) با مقدار تابع هدف  $\bar{z}$  باشد آنگاه احکام زیر برقرارند:

- (۱) هرگاه  $\bar{z} = 0$  آنگاه  $(u^*, v^*, w^*)$  جواب به دست آمده در مساله (۵.۲) جواب بهینه پرتو مدل (۴.۲) خواهد شد.
- (۲) هرگاه  $\bar{z} > 0$  آنگاه  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  جواب بهینه پرتو مساله (۴.۲) خواهد شد.

م. ضمیریان، ع. حیدری، و ن. ابراهیمی

### ۳. نتیجه‌گیری

ارزیابی کارایی در روش شبکه دومارحله‌ای چنددوره‌ای با وزن مشترک از توان تفکیک‌پذیری بالایی برخوردار است. ارزیابی با این تکنیک، ضمن فراهم آوردن بستر منطقی‌تر مقایسه نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده، رضایت مدیران، و کاهش حجم محاسبات را نیز همراه دارد.

### مراجع

1. Cook. W.D.; Kress, M. (1990). Data envelopment Model for aggregating preference data. Managment Science, 1302-1310.
2. Jahanshahloo, G.R.; Memariani, A.A. (2000). Method for finding common set of weights by multiple objective programming in data envelopment analysis. Southwest JPure Appl Math , 44-54.
3. Jahanshahloo, G.r.; Memariani, A.; Lotfi, F.H.; Rezaai,H.Z. (2005). A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. Applied mathematics and computation , 265-281.

## ارایه الگوریتم بهینه سازی ATLBO

اقدس مقدادی\* و محمدرضا اکبرزاده توتونچی

گروه مهندسی برق و قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

a.meghdadi@mail.um.ac.ir

akbarzadeh@ieee.org

چکیده. یکی از جدیدترین الگوریتم‌های بهینه سازی مبتنی بر جمعیت، الگوریتم تدریس- یادگیری است. این الگوریتم با الهام از فرآیند تدریس در کلاس درس مطرح و با توجه به عملکرد مناسب و مزایای آن تبدیل به یک ابزار کاربردی در حوزه بهینه سازی شده است. در این مقاله جهت بهبود کارایی این الگوریتم مدلسازی تبادل اطلاعات بین دانش آموزان کلاس بر اساس روش نشانه گذاری در کلونی مورچه ها و ایجاد یک حافظه گسترده به جای ارتباط مستقیم دو همکلاسی ارایه و منجر به بهبود قابل توجه سرعت و دقت الگوریتم شده است. این الگوریتم بر روی ۱۱ تابع محک استاندارد ارزیابی شده است.

### ۱. مقدمه

الگوریتم‌های فراابتکاری مبتنی بر جمعیت دسته ای از الگوریتم‌های بهینه سازی تقریبی هستند که می توانند جهت حل مسایل پیچیده در زمان کوتاه و پیدا کردن جواب های مناسب در نزدیکی جواب بهینه به کار روند. از نمونه های بارز این الگوریتم‌ها که عمدتاً با الهام از طبیعت مطرح شده اند می توان به الگوریتم ژنتیک، ازدحام ذرات و کلونی مورچگان اشاره کرد. یکی از جدیدترین الگوریتم‌های مبتنی بر جمعیت الگوریتم مبتنی بر تدریس-یادگیری TLBO است که در سال ۲۰۱۱ توسط راتو و همکارانش با الهام از فرآیند یادگیری در یک کلاس درس مطرح و جهت حل یک مساله بهینه سازی در حوزه مکانیک استفاده شد. [۲] این الگوریتم که دارای کارایی قابل توجهی می باشد با توجه به تعداد بسیار کم پارامترها، سادگی ساختار و سرعت همگرایی بالا کاربرد وسیعی در حوزه های مختلف پیدا کرده است. از سال ۲۰۱۱ تاکنون مقالات بسیار زیادی درباره کاربرد این الگوریتم در حل مسایل مختلف بهینه سازی، ارایه نسخه های اصلاح شده و ترکیب آن با دیگر الگوریتم ها منتشر شده است. [۵] تعدادی از این الگوریتم ها در جدول ۱ ارایه شده است. در این مقاله با تغییر ساختار الگوریتم TLBO و استفاده از ایده تبادل اطلاعات با روش نشانه گذاری در الگوریتم ACOR یک الگوریتم بهینه سازی جدید جهت استفاده همزمان از کارایی

واژگان کلیدی. بهینه سازی، الگوریتم مبتنی بر تدریس - یادگیری، الگوریتم کلونی مورچگان .  
\* سخنران

و قابلیت های این دو الگوریتم به نام ATLBO مطرح و بر روی تعداد از توابع محک استاندارد ارزیابی شده است.

جدول ۱: برخی از نسخه های ارایه شده الگوریتم TLBO و ترکیب آن با دیگر الگوریتم ها [۵] و [۱].

Algorithm	Authors	Year	Algorithm	Authors	Year	Algorithm	Authors	Year
TLBO	Rao et al.	2011	mTLBO	Satapathy et al.	2013	LTLBO	Ghasemi et al.	2015
ETLBO	Rao et al.	2012	ITLBO	Yu et al.	2014	ACOR-TLBO	Meghdadi et al.	2015
OTLBO	Satapathy et al.	2013	ANN-TLBO	Uzlu et al.	2014	G-TLBO	Güçyetmez et al.	2016
WTLBO	Satapathy et al.	2013	SA-TLBO	Hosseinpour et al.	2015	TS-TLBO	Raja et al.	2016
A-TLBO	Li et al.	2013	TLBO-DE	Wang et al.	2015	SVM-TLBO	Prasad Das et al.	2016

## ۲. ارایه الگوریتم بهینه سازی ATLBO

الگوریتم TLBO برای مدل سازی فرآیند آموزش و یادگیری دارای دو فاز معلم و شاگرد می باشد. فاز معلم که مربوط به تاثیر معلم در به روز رسانی اطلاعات شاگردان می باشد با رابطه ۱،۲ و ۲،۲ مدلسازی می شود.

$$X_{(new,i)} = X_{(old,i)} + r_i(T_i - T_F M_i) \quad (1.2)$$

در این رابطه  $M_i$  میانگین مقادیر  $X_i$  و  $r_i$  یک عدد کاتوره ای بین صفر و یک و  $T_i$  نیز بهترین عضو جمعیت است که به عنوان معلم در نظر گرفته می شود.  $T_f$  یا فاکتور تدریس نیز با رابطه ۲،۲ تعیین می شود و می تواند مقادیر ۱ یا ۲ را اختیار کند.

$$TF = round(1 + r_i) \quad (2.2)$$

در مقابل فاز شاگرد مربوط به مدل سازی فرآیند تبادل اطلاعات بین دانش آموزان می باشد. در نسخه اولیه این تبادل اطلاعات فقط به صورت مقایسه دو دانش آموز مدل شده است [۲]. اما ایده الگوریتم ترکیبی ارائه شده بر این اساس است که بتوانیم در فاز شاگرد همزمان از اطلاعات تعداد بیشتری از اعضای کلاس استفاده کنیم. الگوریتم کلونی مورچگان، الگوریتم مناسبی است که می تواند تبادل اطلاعات بین اعضای یک گروه را بدون وجود هدایت مرکزی ساماندهی کند. همچنین ترکیب سری این الگوریتم با TLBO نتایج قابل قبولی ارایه کرده است [۱]. لذا در فاز شاگرد با به کارگیری ایده الگوریتم ACOR [۴] یک آرشیو با  $k$  سطر از بهترین راه حل ها ایجاد و سپس با استفاده از یک چرخ رولت یک مورچه راهنما انتخاب می شود. احتمال انتخاب شدن سطر  $j$  این آرشیو از رابطه (۲،۳) بدست می آید:

$$P_j = \omega_j / (\sum_{r=1}^k \omega_r) \quad (3.2)$$

که در این رابطه  $\omega$  ضریب وزنی نسبت داده شده به هر سطر بر حسب تابع برازندگی آن می باشد و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\omega_j = e^{-(j-1)^2 / (2q^2 k^2)} / (qk\sqrt{2\pi}) \quad (4.2)$$

و  $q$  یکی از پارامترهای الگوریتم می باشد. پس از انتخاب راهنما مطابق رابطه (۲،۵) تابع گاوسی حول متغیرهای راه حل راهنما تولید شده و با نمونه برداری از این تابع راه حل های جدید تولید می شوند.

$$g(x, \mu, \sigma) = e^{-(x-\mu)^2 / (2\sigma^2)} / (\sigma\sqrt{2\pi}) \quad (5.2)$$

در این رابطه  $\mu$  برابر با مقدار متغیر  $i$  ام سطر  $g$  یا  $(S_g^i)$  در نظر گرفته شده و  $\sigma$  از رابطه تطبیقی (۲،۶) بدست می آید.

$$\sigma_g^i = \xi \sum_{e=1}^k (|S_e^i - S_g^i| / (k - 1)) \quad (6.2)$$

بدست می آید. در این رابطه  $\xi$  یک پارامتر مثبت است که برای کنترل پراکنندگی استفاده می شود.

### ۳. ارزیابی عملکرد الگوریتم ATLBO

الگوریتم ATLBO، ۲۵ مرتبه به طور مستقل روی ۵ مورد از توابع استاندارد پایه در ۳۰ بعد اجرا شده است. مرتبه ارزیابی، میانگین و انحراف معیار نتایج و همچنین نتایج ارائه شده توسط برخی الگوریتمهای کاربردی مشابه که از مرجع [۳] استخراج شده است، جهت مقایسه در جدول شماره ۲ ذکر شده است. همچنانکه مشاهده می شود الگوریتم پیشنهادی در تمامی موارد قابلیت همگرا شدن به نقطه اکسترم سراسری را دارد. این در حالی است که ماکزیم مرتبه ارزیابی تابع برای رسیدن به مینیم سراسری کاهش قابل توجهی را نسبت به دیگر الگوریتمها نشان می دهد.

جدول ۲: مقایسه نتایج اجرای الگوریتم ATLBO و ۵ الگوریتم بهینه سازی بر روی ۵ تابع استاندارد پایه

		OEA	APSO	CoDE	IABC	mTLBO	ATLBO
Sphere	Mean	2.48e-30	1.45e-150	1.12e-31	5.34e-178	0	0
	Std	1.128e-29	5.73e-150	3.45e-31	0	0	0
	Fes	300,000	300,000	150,000	150,000	150,000	9,000
Schwefel 2.22	Mean	2.07e-13	5.15e-84	1.22e-23	8.82e-127	0	0
	Std	2.44e-12	1.44e-83	3.90e-23	3.49e-126	0	0
	Fes	300,000	300,000	200,000	150,000	200,000	17,000
Rastrigin	Mean	5.43e-17	5.8e-15	1.21e-01	0	0	0
	Std	1.68e-16	1.01e-14	3.89e-02	0	0	0
	Fes	300,000	300,000	100,000	50,000	50,000	1,000
Ackley	Mean	5.34e-14	1.11e-14	1.18e-04	3.87e-14	2.78e-15	0
	Std	2.94e-13	3.55e-15	4.90e-04	8.52e-15	1.56e-15	0
	Fes	300,000	300,000	50,000	50,000	50,000	5,000
Griewank	Mean	1.32e-02	1.67e-02	1.74e-07	0	0	0
	Std	1.56e-02	2.41e-02	2.33e-07	0	0	0
	Fes	300,000	300,000	50,000	50,000	50,000	800

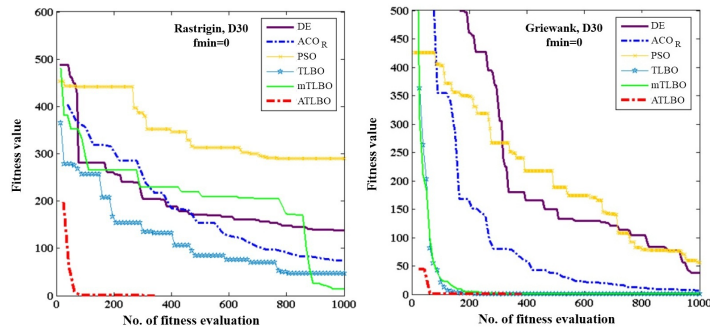
الگوریتم ATLBO همچنین ۵ مرتبه به طور مستقل بر روی ۶ مورد از انواع مختلف توابع CEC2005 در ۳۰ بعد اجرا شده است. نتایج بدست آمده از این ارزیابی در کنار نتایج بدست آمده توسط تعدادی از الگوریتمهای بهینه سازی کاربردی که از مرجع [۳] استخراج شده جهت مقایسه در جدول ۳ ذکر شده است.

جدول ۳: مقایسه نتایج الگوریتم ATLBO و ۵ الگوریتم بهینه سازی بر روی تعدادی از توابع CEC2005

		EPSDE	CLPSO	CoDE	MDE_pBX	mTLBO	ATLBO
$f_1$ Unimodal	Mean	0	0	0	1.34e-62	0	0
	Std	0	0	0	2.43e-61	0	0
	Fes	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000	35,000
$f_2$ Unimodal	Mean	8.74e+05	1.42e+07	1.05e+05	2.09e+03	2.02e+05	1.79e+05
	Std	3.28e+06	4.19e+06	6.25e+04	1.26e+03	1.72e+05	2.40e+04
	Fes	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000
$f_3$ Multimodal	Mean	6.38e-01	4.16e+00	1.60e-01	3.98e-01	1.82e+01	1.30e-04
	Std	1.49e+00	3.48e+00	7.85e-01	1.08e+00	5.79e+00	1.29e-04
	Fes	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000
$f_{11}$ Multimodal	Mean	3.56e+01	2.60e+01	1.18e+01	1.75e+01	3.15e+01	1.32e+01
	Std	3.88e+00	1.63e+00	3.40e+00	6.06e+00	1.11e+00	5.52e+00
	Fes	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000
$f_{14}$ Multimodal	Mean	1.35e+01	1.28e+01	1.23e+01	1.24e+01	1.20e+01	1.23e+01
	Std	2.09e-01	2.48e-01	4.81e-01	3.43e-01	2.11e-01	4.36e-01
	Fes	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000
$f_{17}$ Multimodal	Mean	1.69e+02	2.46e+02	6.67e+01	8.23e+01	1.35e+02	7.38e+01
	Std	1.02e+02	4.81e+01	2.12e+01	3.97e+01	4.24e+01	8.47e+00
	Fes	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000	300,000

همانطور که نتایج جدول ۲ نشان می دهد، ATLBO در حل توابع پایه استاندارد، قابلیت قابل توجهی از خود نشان می دهد. سرعت رسیدن به جواب بهینه در مقایسه با دیگر الگوریتمها کاهش چشمگیری داشته و در تمامی موارد دقیقاً به جواب بهینه همگرا شده است. شکل ۱ نتایج یک مرتبه اجرای ATLBO را بر روی تابع Rastrigin و تابع Griewank نشان می دهند. در این شکل هم چنین نتایج ارایه شده در مرجع [۱] از اجرای یک مرتبه برخی الگوریتمهای بهینه سازی کاربردی جهت مقایسه نشان داده شده





شکل ۱: مقایسه یک مرتبه اجرای الگوریتم ATLBO و ۵ الگوریتم بهینه سازی بر روی تابع Griewank (شکل سمت راست) و تابع Rastrigin (شکل سمت چپ)

است. در مورد توابع پیچیده تر با توجه به جدول ۳، کارایی الگوریتم در برخی توابع Unimodal نسبت به الگوریتمهای مشابه بهبود داشته ولی همچنان الگوریتمهایی مثل MDEpBX یا CoDE در حل تعداد بیشتری از توابع Multimodal کارایی مناسب تری از خود نشان می دهند.

### مراجع

۱. ا. مقدادی و م. ر. اکبرزاده توتونچی، ارائه یک الگوریتم بهینه سازی با ترکیب الگوریتمهای کلونی مورچگان و بهینه سازی مبتنی بر تدریس - یادگیری، بیستمین کنفرانس ملی سالانه انجمن کامپیوتر ایران، ۱۳۹۳.
2. R. V. Rao, V. J. Savsani, and D. P. Vakharia, *Teaching-learning-based optimization: a novel method for constrained mechanical design optimization problems.*, Computer-Aided Design. 43 (2011), no. 3, 303-315.
3. S. C. Satapathy and A. Naik, *Modified Teaching-Learning-Based Optimization algorithm for global numerical optimization— A comparative study*, Swarm and Evolutionary Computation. 16 (2014), 28-37.
4. K. Socha and M. Dorigo., *Ant colony optimization for continuous domains*, European journal of operational research. 185 (2008), no. 3, 1155-1173.
5. R. V. Rao., *Teaching-Learning-Based Optimization Algorithm*. Springer International Publishing (2016).

## حل مساله کنترل بهینه بیماری ابولا با استفاده از اصل ماکزیم‌سازی پونتری‌اگین

اسدالله محمود زاده وزیری، ابوالفضل عبدالله‌زاده\*، و آرمان فرح‌بخش

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند  
amvaziri@birjand.ac.ir  
a.abdolahzadeh@birjand.ac.ir  
a.farahbakhsh@birjand.ac.ir

چکیده. در این مقاله به حل مساله کنترل بهینه بیماری ابولا می‌پردازیم. ابتدا مدل بیماری ابولا را بیان کرده و سپس جواب مساله کنترل بهینه را بر اساس اصل ماکزیم‌سازی پونتری‌اگین بدست می‌آوریم. نتایج عددی در زمان سخنرانی ارائه خواهد شد.

### ۱. مقدمه

ابولا یک ویروس سخت و یک بیماری کشنده با نرخ مرگ و میر تا ۹۰ درصد می‌باشد. شیوع این بیماری به عنوان نگرانی اورژانس بهداشت عمومی توسط سازمان بهداشت جهانی، شناخته شده است. همچنین در غرب آفریقا، تهدید ابولا هنوز یک مانع عمده برای توسعه اجتماعی و اقتصادی می‌باشد. مدل‌های ریاضی نقش حیاتی در کنترل بسیاری از بیماری‌های واگیر از جمله مالاریا، سندروم حاد تنفسی و ابولا، دارند [۱]. هدف اصلی از مدل‌سازی بیماری‌های عفونی این است که بتوانیم یک تصمیم عاقلانه در کاربرد مداخله کنترل عفونت برای از بین بردن و بطور کامل ریشه‌کن کردن آن از جمعیت انسانی بگیریم. بیماری ویروسی ابولا، هیچ درمان موثر یا واکسنی ندارد و در حال حاضر تنها مراقبت‌های پیشگیری می‌توان به بیماران داد. تئوری کنترل بهینه، عفونت ابولا را از سه طریق متفاوت در یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی مدل‌سازی می‌کند. برای کاهش عفونت در جمعیت مستعد، یک کنترل پیشگیرانه، در قالب آموزش و مبارزه و دو کنترل درمان، برای جمعیت انسانی عفونی مرحله اول و مرحله آخر (عفونت پیشرفته) اعمال می‌شود. فعال شدن هر یک از کنترل‌ها، کاهش مثبت عفونت را نشان می‌دهد. در مجموع، فعال‌سازی همه کنترل‌ها بطور هم‌زمان، تلاش لازم برای کاهش سریع عفونت را کاهش می‌دهد. بنابراین برای کاهش تهدید بیماری ابولا، هر سه کنترل باید به صورت هم‌زمان در نظر گرفته شوند. در بخش ۲ به بیان مدل بیماری ابولا می‌پردازیم. حل مساله کنترل بهینه مدل ابولا با استفاده از اصل ماکزیم‌سازی پونتری‌اگین در بخش ۳ بیان شده است.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. ابولا، کنترل بهینه، اصل پونتری‌اگین.  
\* سخنران

## ۲. مدل بیماری ابولا

در مدل بیماری ابولا فرض بر این است که یک تفاوت بین مرحله اول و آخر عفونت وجود دارد که عفونت پیشرفته نامیده می‌شود. بعلاوه افراد در مرحله نهفته، با یک نرخ داده شده به عفونت ابولای فعال توسعه پیدا می‌کنند. همچنین فرض می‌کنیم که یک قسمت از هر دو مرحله اول و آخر عفونت بهبود پیدا می‌کند و بقیه به سمت مرگ می‌روند. سه مکانیزم کنترل ارائه می‌دهیم که شامل دو "پیدا کردن نمونه" و یک "موجودی نمونه" در مدل است. پیدا کردن نمونه معمولاً از فعالیت‌هایی که منجر به اقدامات پیشگیرانه از جمله غربالگری، آموزش عمومی و غیره می‌شود، ساخته شده است. موجودی نمونه نیز این است که فعالیت‌هایی طراحی می‌کند تا اطمینان حاصل شود که بیماران داروهایشان را در زمان تعیین شده می‌گیرند و بنابراین بهبود می‌یابند. اولین کنترل پیدا کردن نمونه،  $u_1(t)$ ، ارتباط بین افراد عفونی و مستعد را مشخص می‌کند پس نرخ عفونی کاهش می‌یابد. دومین پیدا کردن نمونه،  $u_2(t)$ ، آن دسته از افرادی که در مرحله پنهان یا در معرض، هستند را شناسایی و از آن‌ها مراقبت می‌کند، بنابراین نرخ ابتلا به بیماری کاهش می‌یابد. کنترل موجودی نمونه،  $u_3(t)$ ، به منظور کاهش افرادی که بیماری آن‌ها توسعه یافته یا به سمت مرگ هستند، تلاش می‌کند که افرادی که در مرحله اول و آخر عفونت قرار دارند درمان شوند و تحت نظارت قرار گیرند. بنابراین نرخ شکست درمان افراد دارای بیماری ابولا، را مینیمم می‌کند. این مدل کل جمعیت را توسط زیر جمعیت‌های اپیدمیولوژیک،  $S$  تعداد افراد مستعد،  $E$  در معرض بیماری،  $I_1$  دارای عفونت مرحله اول،  $I_2$  دارای عفونت مرحله آخر یا پیشرفته،  $R$  بهبود یافته و  $F$  فوت شده و آماده برای انتقال به مراسم خاکسپاری، تقسیم می‌کند [۲]. فرض کنید  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  و  $\beta_F$  به ترتیب نشان دهنده نرخ افراد مستعد که توسط افراد دارای عفونت مرحله اول، مرحله آخر و فوت شده، باشند. همچنین،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  نشان دهنده کسری از افراد آلوده که به مرحله آخر عفونت و کسری از افرادی که به سمت مرگ پیش رفته‌اند، و  $\mu$  نشان دهنده سرانه طبیعی مرگ و میر ناشی از بیماری ابولا باشند. بنابراین مدل بیماری ابولا به صورت

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - (1 - u_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F)S - \mu S, & (1.2) \\ \frac{dE}{dt} &= (1 - u_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F)S - (\alpha u_2 + \mu)E, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \alpha u_2 E - (u_3 \delta_1 \gamma_1 + \mu)I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= u_3 \delta_1 \gamma_1 I_1 - (u_3 \delta_2 \gamma_2 + \mu)I_2, \\ \frac{dF}{dt} &= u_3 \delta_2 \gamma_2 I_2 - \gamma_F F, \\ \frac{dR}{dt} &= u_3(1 - \delta_1)\gamma_1 I_1 + u_3(1 - \delta_2)\gamma_2 I_2 - (\mu + \gamma_R)R, & (2.2) \end{aligned}$$

بیان می‌شود که متوسط طول بیماری در مرحله اول با  $\gamma_1^{-1}$  و در مرحله آخر با  $\gamma_2^{-1}$ ، متوسط زمان مرگ تا خاکسپاری با  $\gamma_F^{-1}$  و متوسط دوره درمان ابولا با  $\gamma_R^{-1}$ ، نشان داده شده است. همچنین افراد در معرض با نرخ  $\alpha$  به سمت کلاس افراد عفونی مرحله اول حرکت می‌کنند.

حل مساله کنترل بهینه ابولا با استفاده از اصل پونترياکين

### ۳. کنترل بهینه

هدف، مينيم کردن تعداد افراد عفونی با ابولا، در حالیکه هزینه درمان خیلی پایین نگه داشته شود، می باشد. از دیدگاه ریاضی، برای زمان نهایی ثابت  $t_f$ ، مساله مينيم کردن تابع هدف

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ I_1(t) + I_2(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) + \frac{A_3}{2} u_3^2(t) \right] dt, \quad (1.3)$$

می باشد که ضرایب  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  به ترتیب هزینه های کنترل های  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  می باشند. بنابراین ما بدنبال تعیین کنترل بهینه  $u_1^*$ ،  $u_2^*$  و  $u_3^*$  هستیم بطوریکه

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min_{\Omega} J(u_1, u_2, u_3), \quad (2.3)$$

که  $\Omega = \{(u_1, u_2, u_3) \in L^1([t_0, t_f]) \mid c_i \leq u_i \leq d_i, i = 1, 2, 3\}$  و  $c_i$  و  $d_i$  ثابت های مثبت می باشند. اصل پونترياکين شرط لازم مساله کنترل بهینه را فراهم می کند. در واقع اصل ماکزيم سازی پونترياکين روابط (۱.۲) تا (۲.۳) را به یک مساله مينيم سازی تابع هاميلتون،  $H$ ، نسبت به  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  تبدیل می کند

$$H = I_1 + I_2 + \frac{A_1}{2} u_1^2 + \frac{A_2}{2} u_2^2 + \frac{A_3}{2} u_3^2 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i g_i, \quad (3.3)$$

که در آن  $g_i$ ، سمت راست  $i$  امین معادله ديفرانسیل دستگاه (۱.۲) و  $\lambda_i$ ،  $i = 1, \dots, 6$ ، متغیرهای الحاقی می باشند. با بکارگیری اصل ماکزيم سازی پونترياکين، متغیرهای الحاقی در دستگاه

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F) + \mu \lambda_1, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = (\lambda_2 - \lambda_3) \alpha u_2 + \mu \lambda_2,$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \beta_1 S + (\lambda_3 - \lambda_4) u_3 \delta_1 \gamma_1 + \mu \lambda_3 - u_3 (1 - \delta_1) \gamma_1 \lambda_6 - 1,$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \beta_2 S + (\lambda_4 - \lambda_5) u_3 \delta_2 \gamma_2 + \mu \lambda_4 - u_3 (1 - \delta_2) \gamma_2 \lambda_6 - 1,$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \beta_F S + \gamma_F \lambda_5,$$

$$\frac{d\lambda_6}{dt} = (\mu + \gamma_R) \lambda_6, \quad (5.3)$$

با شرایط اریبی  $\lambda_i(t_f) = 0$ ،  $i = 1, \dots, 6$ ، صدق می کنند. از طرفی بنا بر اصل پونترياکين داریم (معادلات بهینگی) [۳]

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = A_1 u_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F) S = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = A_2 u_2 + (\lambda_3 - \lambda_2) \alpha E = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_3} &= A_3 u_3 + (\lambda_4 - \lambda_3) \delta_1 \gamma_1 I_1 + (\lambda_4 \delta - \lambda_4) \delta_2 \gamma_2 I_2 \quad (۶.۳) \\ &+ \lambda_6 ((1 - \delta_1) \gamma_1 I_1 + (1 - \delta_2) \gamma_2 I_2) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین مقدار متغیرهای کنترل را از دستگاه (۶.۳) بدست می‌آوریم که به صورت

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F)S}{A_1}, \\ u_2 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\alpha E}{A_2}, \quad (۷.۳) \\ u_3 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)\delta_1 \gamma_1 I_1 + (\lambda_5 - \lambda_4)\delta_2 \gamma_2 I_2 - \lambda_6 ((1 - \delta_1) \gamma_1 I_1 + (1 - \delta_2) \gamma_2 I_2)}{A_3}, \end{aligned}$$

حاصل می‌شوند. چون  $i = 1, \dots, 6, c_i \leq u_i \leq d_i$  بنابراین مقادیر کنترل بهینه به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= \max \left( c_1, \min \left( d_1, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F)S}{A_1} \right) \right), \\ u_2^*(t) &= \max \left( c_2, \min \left( d_2, \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\alpha E}{A_2} \right) \right), \\ u_3^*(t) &= \max \left( c_3, \min \left( d_3, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)\delta_1 \gamma_1 I_1 + (\lambda_5 - \lambda_4)\delta_2 \gamma_2 I_2}{A_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda_6 ((1 - \delta_1) \gamma_1 I_1 + (1 - \delta_2) \gamma_2 I_2)}{A_3} \right) \right). \quad (۸.۳) \end{aligned}$$

در عمل یک روش تکراری برای بدست آوردن سیستم بهینه مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابتدا متغیرهای کنترل را به دلخواه مقدار می‌دهیم و معادلات حالت (۱.۲) را با یک روش پیشرو حل می‌کنیم. سپس یا جایگذاری متغیرهای حالت بدست آمده، دستگاه معادلات الحاقی (۴.۳) را با شرایط آریبی داده شده، به صورت پسرو حل می‌کنیم. بنابراین مقادیر متغیرهای کنترل را می‌توان از رابطه (۸.۳) محاسبه نمود. کفایت مقادیر کنترل جدید را به صورت ترکیب محدبی از مقادیر کنترل اولیه و مقادیر کنترل بدست آمده در نظر گرفت. این روند را میتوان تا زمانیکه اختلاف متغیرهای کنترل با گام قبل کوچک شود، ادامه داد.

### مراجع

1. G. Chowell and H. Nishiura, *Transmission dynamics and control of Ebola virus disease (EVD) a review*. BMC. Med. (2014).
2. CM. Rivers, ET. Lofgren, M. Marathe, S. Eubank and BL. Lewis, *Modeling the impact of interventions on an epidemic of Ebola in Sierra Leone and Liberia*, PLOS Curr. (2014).
3. LS. Pontryagin, VG. Boltyanskii, RV. Gamkrelidze and EF. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, New York: Gordon & Breach Science Publishers Inc, 1986.

پوسترها

## مطالعه مدل ریاضی واکسیناسیون بیماری سرخک بر پایه کنترل بهینه و استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات ( $PSO$ )

علیرضا فخارزاده جهرمی و صدیقه آریان‌مهر\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز  
a\_fakharzadeh@sutech.ac.ir  
sedigheh.arianmehr@gmail.com

چکیده. سرخک یک بیماری مسری است که با ویروس سرخک ایجاد می‌شود. گرچه علایم سرخک شبیه علایم سرماخوردگی، تب شدید، آبریزش بینی، عطسه و سرفه های خشک است، اما بهترین و تنها راه شناخته شده برای مقابله با این بیماری پیشگیری توسط واکسن سرخک است. از آنجا که همواره مدل‌سازی ریاضی، یک ابزار مهم و مفید در مطالعه ی نحوه گسترش و کنترل بیماری های عفونی است، ابتدا به معرفی مدل ریاضی برای انجام واکسیناسیون سرخک به عنوان عامل کنترل عفونت می‌پردازیم. این در حالی است که تعیین فرآیند بهینه واکسیناسیون می‌تواند آمار مرگ‌ومیر را کاهش دهد. بنابراین یکبار با استفاده از نظریه کنترل بهینه و اصل کمینه پونتریاگین و یکبار هم با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات ( $PSO$ ) برای یافتن مقدار بهینه  $\tau$ ، در این مقاله به تعیین نحوه واکسیناسیون بهینه می‌پردازیم.

### ۱. مقدمه

سرخک یک بیماری واگیردار است که بیشتر در میان کودکان اتفاق می‌افتد و مشکلات زیادی برای آنان و خانواده آنان ایجاد می‌کند. ویروس سرخک توسط سرفه، عطسه و از ارتباط بین فردی و یا ارتباط مستقیم با ترشحات گسترش می‌یابد. علایم این بیماری معمولاً ۱۰ تا ۱۲ روز

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49-xx ; Secondary 34-xx, 49Kxx, 34G20.

واژگان کلیدی. سرخک، کنترل بهینه، پونتریاگین، الگوریتم  $PSO$ .  
\* سخنران

پس از قرار گرفتن در معرض افراد آلوده توسعه می‌یابد. واکسیناسیون سرخک برای کودکان راهکار کلیدی حفظ سلامت در مقابل گسترش این بیماری است. امروزه سرخک هنوز یک بیماری شایع و اغلب کشنده در جهان است [۱]. گرچه قبل از قرن ۱۷ سرخک شناخته شد، اما در سال ۱۹۶۳ اولین واکسن بر علیه سرخک معرفی شد. دو نوع واکسن بر علیه سرخک وجود داشته است یک نوع آن ویروس مرده سرخک و نوع دیگر آن ویروس زنده سرخک است که ضعیف شده و دیگر قادر به ایجاد عفونت نیست. چون ویروس زنده سرخک برای جلوگیری از بیماری موثر نبوده است، استفاده از این واکسن در سال ۱۹۷۶ متوقف شد. در سال ۱۹۶۰، بازتلت بحران اندازه جمعیت برای بیماری سرخک را در ایالات متحده در شرایط کلی جمعیت تخمین زد و از آن زمان به بعد، بررسی مدل ریاضی و استفاده از آن در مهار بیماری سرخک در کشور های مختلف توسعه یافته است.

## ۲. مدل دینامیکی رشد بیماری سرخک

برای معرفی مدل دینامیکی بیماری سرخک، ابتدا کل جمعیت با اندازه  $N(t)$  به چهار دسته مجزای افراد حساس، در معرض، عفونی و بهبودیافته که به ترتیب با اندازه‌های  $E(t)$ ،  $I(t)$  و  $R(t)$  مشخص می‌شوند، تقسیم می‌گردد. بر این اساس مدل رشد بیماری سرخک به صورت زیر ارائه شده است [۲]:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS(1 - bS) - \beta SI - \mu S; \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (d + \alpha)E; \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (d + \alpha)I; \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + \mu S - dR \end{aligned} \quad (1.2)$$

که در آن  $r$  میزان رشد ذاتی جمعیت حساس،  $\frac{1}{b}$  ظرفیت حمل از جمعیت حساس در عدم وجود عفونت،  $\beta$  میزان عفونت،  $\mu$  نسبت پوشش واکسیناسیون حساس،  $d$  میزان مرگ و میر طبیعی،  $\frac{1}{\alpha}$  دوره نهفتگی سرخک و  $\delta$  میزان باز پوشش از افراد عفونی است.

## ۳. مدل کنترل بهینه رشد بیماری سرخک

از آنجا که از واکسیناسیون به منظور کنترل جمعیت بیمار استفاده می‌شود، لذا از دیدگاه نظریه کنترل بهینه به دنبال تعیین کمترین میزان واکسیناسیون به منظور حداقل کران جمعیت عفونی هستیم. چون سه معادله اول رابطه (۱-۲) مستقل از  $R(t)$  هستند، ابتدا از جایگذاری  $x = bS$ ،  $y = \beta I$  و  $z = \beta I$  در مدل (۱-۲) استفاده می‌کنیم، سپس با استفاده از تابع هدف ترکیبی مساله کمینه‌سازی، دوز تزریق و میزان جمعیت عفونی به صورت یک مساله کنترل بهینه، به



صورت زیر قابل نمایش است.

$$J(\mu) = \min_{0 \leq \mu(t) \leq r} \int_0^T (z(t) + \frac{\tau}{2} \mu(t)^2) dt$$

$$S. to : \quad \dot{x} = rx(1-x) - xz - \mu x;$$

$$\dot{y} = xz - \alpha_1 y; \quad (1.3)$$

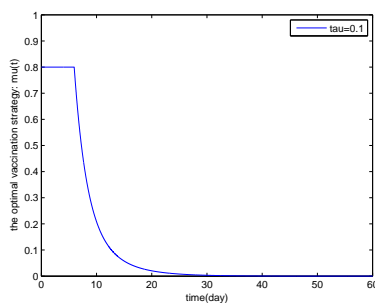
$$\dot{z} = \alpha_2 y - \alpha_3 z.$$

که در آن  $T$  نشان‌دهنده دوره واکسیناسیون و  $\tau$  نشان‌دهنده پارامتر وزن مثبت و همچنین  $\alpha_1 = d + \alpha$  و  $\alpha_2 = \frac{\alpha\beta}{b}$  و  $\alpha_3 = d + \delta$  می‌باشد.

#### ۴. روش تعیین جواب بهینه

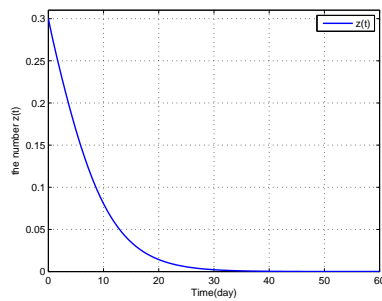
با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین [۳]، داریم  $\mu^*(t) = \frac{\lambda_1 x^*(t)}{\tau}$ ، از جایگذاری  $\mu^*(t)$  در دستگاه (۱-۳) جواب‌های  $x_1^*(t) = x$  و  $x_2^*(t) = y$  و  $x_3^*(t) = z$  با استفاده از *Ode45* متلب مشخص می‌شوند. جایگذاری این جواب‌ها در تابع هدف (۱-۳) و سپس کمینه تابع هدف با استفاده از دستور متلب، مقدار بهینه  $J^*(\tau)$ ، برای  $\tau$  داده شده مشخص می‌شود. حال با استفاده از الگوریتم *PSO* مقدار بهینه  $\tau$  در بازه مشخص  $[0.1, 10]$  برابر  $\tau^* = 0.1$  بدست می‌آید که مقدار کمینه تابع هدف به ازای آن  $J^*(\tau^*) = 2.2644$  است؛ چون تابع هدف یکنوای صعودی و نسبت به  $\tau$  خطی می‌باشد، بنابراین مقدار کمینه آن به کران بالای  $\tau$  بستگی ندارد. همچنین به دلیل یکتایی مقدار بهینه مساله (۱-۳) به ازای هر  $\tau$ ، فقط یک مقدار برای  $J(\mu)$  بدست می‌آید، بنابراین یک تابع می‌توان از دامنه پیشنهاد شده برای  $\tau$  به مجموعه  $R$  تعریف کرد. کمینه‌سازی این تابع غیر صریح، توسط *PSO* مقدار بهینه  $\tau$  را بدست خواهد داد. در حالت کلی با استفاده از الگوریتم *PSO*، صحت مقدار بهینه  $\tau$  تایید گردیده است. دلیل استفاده از *PSO*، سرعت خوب آن در همگرایی به جواب است.

در زیر شکل ۱، نمودار میزان واکسیناسیون بهینه به ازای مقدار بهینه  $\tau$  و شکل ۲، نمودار میزان افراد عفونی در بازه مشخص  $t = 60$  نشان می‌دهد:



شکل ۱: میزان واکسیناسیون بهینه  $\mu$

ع. فخرزاده جهرمی و ص. آریان مهر



شکل ۲: میزان افراد عفونی  $z(t)$

### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از ارایه مدل کنترل بهینه رشد بیماری سرخک، روش تعیین دوز بهینه به منظور کمینه‌سازی ترکیبی دوز مورد استفاده و جمعیت عفونی نیز بیان و پیاده‌سازی گردید. نسبت به پارامتر تعادل، اهداف در حالت بهینه میزان دوز بهینه و نحوه توزیع آن ارایه شده است.

### مراجع

1. P. L. Panum, *Observations Made During the Epidemic of Measles on the Faroe Islands in the Year 1846*, Delta Omega Society, Cleveland, 1940.
2. L. Pang, S. Ruan, S. Rua, Z. Zhao and X. Zhang, *Transmission dynamics and optimal control of measles epidemics*, Applied Mathematics and Computation, **256**, 131-147 (2015).
3. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskij, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, 1962.

## فرایند لیو در قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار

نسیم مسیب\* و حمیدرضا عرفانیان

گروه ریاضی مالی، دانشکده علوم پایه و فناوری های زیستی، دانشگاه علم و فرهنگ  
n.mosayeb@usc.ac.ir  
erfanian@usc.ac.ir

چکیده. از سالیان گذشته چنین مرسوم بوده که قیمت سهام توسط فرایندهای تصادفی مدل شود. همچنین یکی از مدل‌های شناخته شده در زمینه قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار مدل بلک-شولز می باشد. از سوی دیگر حرکت براونی به عنوان پایه و اساس مدل بلک-شولز، در حوزه قیمت سهام، دارای برخی ایرادات می باشد و لذا یک مدل فازی تحت عنوان مدل لیو در جهت رفع این ایرادات ارائه شده است. علاوه بر این در پایان این مقاله مقایسه‌ای میان این دو رویکرد به منظور بررسی عملکرد دو مدل صورت خواهد گرفت.

### ۱. مقدمه

قراردادهای اختیار به عنوان یکی از مهمترین انواع مشتقات مالی، در بازارهای مالی کاربرد فراوان داشته و قیمت‌گذاری آنها نیز اهمیت ویژه‌ای دارد. لذا هدف از نگارش این مقاله بررسی یک فرمول قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار بر اساس یک فرایند فازی به نام لیو بوده که در آن، به جای اندازه احتمال رایج، از یک اندازه اعتباری استفاده می‌شود [۱] و همچنین به یک مقایسه کمی بین این مدل فازی و مدل بلک-شولز پرداخته خواهد شد.

تعریف ۱.۱. فرایند فازی  $C_t$  یک فرایند لیو نامیده می‌شود هرگاه:

$$C_0 = 0, \text{اولا،}$$

ثانیا،  $C_t$  دارای نمونه‌های مستقل و ثابت باشد.

ثالثا، هر نمو  $C_{(s+t)} - C_s$  یک متغیر فازی نرمال توزیع شده با امید ریاضی  $at$  و واریانس

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 91G80; Secondary 91G50.

واژگان کلیدی. اندازه اعتبار، فرایند لیو، قرارداد اختیار اروپایی.  
\* سخنران

ن. مسیب و ح. عرفانیان

$\sigma^2 t^2$  است، که تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\xi}(x) = 2(1 + \exp(\frac{\pi|x - \alpha|}{\sqrt{6}\sigma}))^{-1} \quad (1.1)$$

فرایند لیو پارامترهای  $\alpha$  (که ضریب رانش نامیده می‌شود) و  $\sigma$  (که ضریب انتشار نام می‌گیرد) را اختیار می‌کند. و برای  $\alpha = 0$  و  $\sigma = 1$  یک فرایند لیو استاندارد خواهیم داشت [۲].

با استفاده از فرمول لیو، بازده یک قرارداد اختیار و برخی مباحث ریاضی داریم:

قضیه ۲.۱. قیمت یک قرارداد اختیار اروپایی بر پایه مدل سهام لیو به این صورت است [۳]:

$$f(Y_0, k, \alpha, \sigma, r) = Y_0 \exp(-rT) \int_{\frac{k}{Y_0}}^{+\infty} (1 + \exp(\frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma T}(\ln(x) - \alpha T)))^{-1} dx \quad (2.1)$$

در مرحله بعد، به منظور مقایسه مدل‌های بلک-شولز و لیو با یکدیگر، آزمایشی به وسیله نرم افزار متلب و داده‌های سهام واقعی طراحی شده است، که در این آزمایش، با یک تاریخ شروع و قیمت اجرای مشخص و برای دوره‌های زمانی ۳۰، ۶۰، ...، ۲۴۰، روزه، قیمت‌های مدل‌های لیو و بلک-شولز برای قراردادهای اختیار منقضى در یک تاریخ مشخص، محاسبه می‌شود. در این آزمایش دو لیست از مقادیر پیش‌بینی (یکی برای پیش‌بینی مدل بلک-شولز و دیگری برای مدل لیو) و یک لیست از مقادیر واقعی در اختیار خواهیم داشت. در هر روز، تفاوت بین مقادیر واقعی و مقادیر پیش‌بینی شده محاسبه می‌شود و بعنوان معیار دقیقی از این تفاوت، و نیز بعنوان ابزاری برای مقایسه دو روش مورد بحث، از دو معیار دقت، یعنی دو خطای زیر استفاده می‌کنیم: ریشه میانگین مربعات خطا RMSE با فرمول زیر:

$$\sqrt{\frac{\sum (A - P)^2}{n}}$$

که در آن A قیمت واقعی، P قیمت پیش‌بینی شده و n تعداد کل مشاهدات است. میانگین قدر مطلق خطا MAE با فرمول زیر:

$$\frac{\sum |A - P|}{n}$$

مرحله نخست تحلیل‌ها، مقایسه بین RMSE و MAE بدست آمده برای مدل فازی لیو و مدل بلک-شولز خواهد بود که این امر از طریق محاسبه میانگین RMSE و MAE برای هر مدل در طول هر دوره زمانی انجام می‌شود. سپس میانگین این دو نوع خطا برای تمامی سهام مورد بررسی (در اینجا ۱۰ سهم) محاسبه گشته و با هم مقایسه می‌گردد.

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

نتایج آزمون بر روی سه دوره سی روزه به شرح زیر است: (سطر اول RMSE و سطر دوم MAE)

جدول ۱: میانگین خطاها برای آزمون سی روزه

Black Scholes	Liu	BS-Liu
۷۹,۶۹۶۹	۳۷,۳۲۸۹	۴۲,۳۶۷۹
۷۳,۵۲۹۷	۲۸,۹۸۱۶	۴۴,۵۴۸۱

همانطور که در جدول ۱ مشخص است، مقدار هر دو خطا برای مدل لیو کمتر بوده و این موضوع نشان دهنده بهتر بودن عملکرد مدل لیو می‌باشد. با بررسی نتایج تحلیل مشخص می‌شود مدل لیو همواره در تمام دوره‌های زمانی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک-شولز دارد. تفاوت عمده این دو مدل در این است که مدل بلک-شولز از اندازه احتمال استفاده می‌کند در حالی که مدل لیو بر پایه اندازه اعتبار بنا شده است. از جمله تفاوت‌های عمده دیگری که میان رویکرد فازی و تصادفی وجود دارد تفاوت میان نمودارهای نرمال در دو حالت است که یکی از دلایل تاثیرگذار بر ایجاد نتایج متفاوت است.

#### مراجع

1. Liu, B., *Fuzzy process, hybrid process and uncertain process*. Journal of Uncertain systems, 2008. 2(1): p. 3-16.
2. Qin, Z. and X. Li, *Fuzzy calculus for finance*. Uncertainty Theory Laboratory, Beijing, 2008
3. Ely, W., *Pricing European stock options using stochastic and fuzzy continuous time processes*, University of North Carolina at Greensboro, 2012.

## تأثیر تابع عضویت مثلثی، ذوزنقه‌ای و گوسی بر برآورد بیز فازی بهینه برای داده‌های طول عمر

شادی سعیدی جیبری\*، محمدرضا زادکرمی، و غلامعلی پرهام

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز  
sh.saeidi.j@gmail.com  
zadkarami@yahoo.co.uk  
parham\_g@scu.ac.ir

چکیده. انتخاب تابع عضویت مناسب در داده‌های فازی مهم است زیرا تابع عضویت روی استنباط آماری فازی تأثیر فراوانی دارد. در این مقاله برآورد بیز فازی برای توابع عضویت مثلثی، ذوزنقه‌ای و گوسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و تابع عضویت مناسب در داده‌های فازی با توجه به مینیمم کردن ریسک بیز پسین برآورد بیز فازی انتخاب می‌شود. نتایج حاصل نشان می‌دهد که تابع عضویت گوسی دارای کمترین ریسک بیز می‌باشد و بنابراین بهترین برآورد بیز فازی برای داده‌های مطرح شده خواهد بود.

### ۱. مقدمه

در استنباط بیزی در برخی از موارد داده‌ها به صورت نادقیق مشاهده یا گزارش شده‌اند که باید از منطق فازی استفاده کرد. داده‌های فازی براساس یک تابع عضویت ساخته می‌شوند در نتیجه ساختار ریاضی تابع عضویت برای انجام استنباط آماری مؤثر است. انتخاب تابع عضویت مطلوب یکی از مسائل مورد علاقه محققین می‌باشد که از منطق فازی استفاده می‌کنند و تابع ریسک بیز می‌تواند یک معیار در انتخاب تابع عضویت در استنباط بیزی فازی باشد. در این مقاله سعی می‌شود تابع عضویت مناسب با استفاده از تابع ریسک بیز برآوردگر بیز انتخاب شود.

---

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 62A86

واژگان کلیدی. تابع عضویت، توزیع پسین فازی، ریسک بیز پسین، برآورد بیز فازی.  
\* سخنران

یک دیدگاه متفاوت در بحث استنباط بیز امکانی توسط لاپوینت و بوبی [۲] تحت تابع پسین امکانی مورد بررسی قرار گرفته است. تعمیمی از روش لاپوینت و بوبی برای داده‌ها فازی توسط عارفی و طاهری [۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. این مقاله شامل ۴ بخش می‌باشد. در بخش ۲ مفاهیم ضروری فازی و به محاسبه‌ی توزیع پسین فازی پرداخته می‌شود. در بخش ۳ براساس تابع پسین بدست آمده برآوردگر بیز فازی محاسبه می‌شود و سپس با استفاده از داده‌های واقعی فازی تأثیر توابع عضویت مثلثی، دوزنقه‌ای و گوسی بر ریسک بیز پسین برآوردهای بیز فازی بررسی می‌شود و بخش ۴ شامل یک نتیجه‌گیری کوتاه است.

## ۲. تابع پسین فازی براساس تابع پیشین احتمالی تحت داده‌های فازی

عدد فازی عددی است که به طور دقیق مشخص نمی‌شود. فرض کنید  $X$  مجموعه مرجع باشد. **تعریف ۱.۰۲.** تابعی که به هر عضو  $x$  از  $X$ ، عددی از بازه  $[0, 1]$  را نسبت دهد تابع عضویت می‌نامیم و به صورت  $\mu_{\bar{A}} : X \rightarrow [0, 1]$  تعریف می‌شود. **تعریف ۲.۰۲.** اگر یک مجموعه فازی مانند  $\bar{A}$  بر روی مجموعه‌ی مرجع  $R$  از اعداد حقیقی در شرایط زیر صدق نماید آن را عددفازی می‌نامند:  
الف) یک مجموعه فازی محدب باشد.  
ب) تنها یک  $x_0$  موجود باشد که به ازای آن  $\mu_{\bar{A}}(x_0) = 1$   
پ) در یک بازه  $\mu_{\bar{A}}$  پیوسته باشد.  
تابع عضویت‌های مختلفی وجود دارد که از مهمترین آن‌ها می‌توان به مثلثی، دوزنقه‌ای و گوسی اشاره کرد.

**تعریف ۳.۰۲.** تابع عضویت مثلثی بوسیله سه عدد حقیقی که به صورت  $(a, b, c)$  بیان می‌شوند، تعریف می‌گردد که  $a$  و  $c$  به ترتیب گستره‌ی چپ و گستره‌ی راست و  $b$  مرکز عدد فازی نامیده می‌شود و به شکل

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان داده می‌شود.

**تعریف ۴.۰۲.** فرض کنید در یک مجموعه فازی بیشتر از یک عضو دارای مقدار عضویت یک باشند در این صورت تابع عضویت دوزنقه‌ای با چهار عدد حقیقی به صورت

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مشخص می‌شود.

تأثیر تابع عضویت مثلثی، دوزنقه‌ای و گوسی بر برآورد بیز فازی بهینه

**تعریف ۵.۲.** تابع عضویت گوسی با دو پارامتر  $a$  که مرکز عدد فازی را نشان می‌دهد و  $\sigma$  به صورت

$$gsn(x : a, \sigma) = e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید  $P_X(x|\theta)$  یک تابع احتمال باشد که در آن  $\theta$  دارای توزیع پیشین  $\pi(\theta)$  است. توزیع پسین  $\theta$  بر پایه‌ی داده‌های فازی  $\tilde{X}$  به صورت  $\pi(\theta|\tilde{X}) = \frac{P(\tilde{X}|\theta)\pi(\theta)}{P(\tilde{X})}$  تعریف می‌شود. که در آن

$$P(\tilde{X}|\theta) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [(\prod_{i=1}^n \tilde{X}_i(x_i)).l(\theta; \underline{x})] dx_1 \dots dx_n & \text{اگر } f(\cdot|\theta) \text{ پیوسته باشد} \\ \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} [(\prod_{i=1}^n \tilde{X}_i(x_i)).l(\theta; \underline{x})] & \text{اگر } f(\cdot|\theta) \text{ گسسته باشد} \end{cases}$$

می‌شود و در این فرمول  $l(\theta; \underline{x})$  تابع درست‌نمایی و  $P(\tilde{X}) = \int P(\tilde{X}|\theta)\pi(\theta)d\theta$

### ۳. برآورد بیز فازی

برآورد بیز فازی بر پایه‌ی داده‌های فازی عبارت است از یافتن یک برآوردگر  $d_f$  از فضای برآوردگرهای فازی  $D_f$  برای پارامتر مجهول  $\theta$  براساس نمونه‌ی تصادفی فازی  $\tilde{X}$ ، و احتمالاً توزیع پیشین  $\pi(\theta)$  تحت تابع زیان  $L(\theta, d_f)$ .

**تعریف ۱.۳.** تابع ریسک بیز پسین برآوردگر فازی  $d_f$  برابر است با

$$r(\pi, d_f) = E_{\theta|\tilde{X}}(L(\theta, d_f(\tilde{X}))) = \int_{\theta} L(\theta, d_f(\tilde{X}))\pi(\theta|\tilde{X})d\theta$$

**تعریف ۲.۳.** برآورد  $d_f^B$  براساس تابع زیان  $L(\theta, d)$  و توزیع پسین فازی با داده‌های فازی  $\pi(\theta|\tilde{X})$  یک برآورد بیز فازی نامیده می‌شود اگر تابع ریسک بیز پسین فازی را مینیمم کند.

$$r(\pi, d_f^B) = \min_{d_f \in D_f} r(\pi, d_f)$$

**مثال ۳.۳.** داده‌های طول عمرلنت‌های ترمز دیسک جلو روی یک مجموعه تصادفی از  $40^\circ$  ماشین در جدول زیر آمده است (باتوجه به [۳])

۵۹/۸	۷۳/۱	۴۲/۸	۴۸/۸	۲۲/۷	۴۵/۵	۳۸/۴	۸۶/۲
۳۱/۷	۲۸/۴	۱۰۲/۵	۸۱/۷	۲۲/۶	۳۶/۷	۴۱/۰	۴۵/۱
۳۳/۹	۴۶/۹	۴۲/۷	۶۱/۵	۴۰/۰	۴۲/۲	۵۶/۴	۵۲/۱
۵۰/۶	۴۵/۹	۸۰/۶	۵۳/۶	۳۸/۸	۵۱/۶	۸۱/۳	۵۴/۲
۵۶/۷	۳۳/۸	۶۴/۵	۵۰/۷	۵۰/۲	۳۴/۴	۶۲/۴	۵۹/۰

فرض کنید که طول عمرلنت‌های ترمز از توزیع نمایی با تابع چگالی  $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$   $t > 0$   $\theta > 0$  و تابع پیشین احتمالی  $\frac{1}{40}e^{-\frac{\theta}{40}}$  پیروی می‌کنند مشاهدات به صورت داده‌های فازی با تابع



ش. سعیدی جیبری، م.ر. زادکرمی، و غ.ع. پرهام

عضویت مثلثی، دوزنقه‌ای و گوسی استفاده می‌شوند. ابتدا تابع عضویت مثلثی را در نظر می‌گیریم به طوری که  $s_i = 0.05x_i, i = 1, 2, \dots, 40$  و

$$\tilde{X}_i(t) = \begin{cases} \frac{t-x_i+s_i}{s_i} & x_i - s_i < t \leq x_i \\ \frac{x_i+s_i-t}{s_i} & x_i \leq t < x_i + s_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استفاده از فرمول توزیع پسین فازی برآورد بیز پارامتر  $\theta$  برابر  $52/116$  با مقدار ریسک  $68/3814$  خواهد بود. اکنون داده‌ها را با تابع عضویت دوزنقه‌ای به فرم

$$\tilde{X}_i(t) = \begin{cases} \frac{t-x_i+s_i}{\frac{s_i}{2}} & x_i - s_i < t < x_i - \frac{s_i}{2} \\ 1 & x_i - \frac{s_i}{2} \leq t \leq x_i + \frac{s_i}{2} \\ \frac{x_i+s_i-t}{\frac{s_i}{2}} & x_i + \frac{s_i}{2} < t < x_i + s_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. با استفاده از فرمول توزیع پسین فازی برآورد بیز پارامتر  $\theta$  برابر  $52/111$  با مقدار ریسک  $68/3740$  بدست می‌آید. و در آخر داده‌ها را با تابع عضویت گوسی به صورت

$$\tilde{X}_i(t) = \begin{cases} e^{-\frac{(t-x_i)^2}{2s_i}} & x_i - s_i \leq t \leq x_i + s_i \\ 0 & \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. و برآورد بیز پارامتر  $\theta$  برابر  $52/109$  با مقدار ریسک  $68/3722$  بدست می‌آوریم. برآورد بیز فازی و مقدار ریسک بیزیسیسین برآوردهای بیز برای توابع عضویت مثلثی، دوزنقه‌ای و گوسی به کمک یکی از قوی‌ترین نرم افزارها در حل محاسبات عددی در جدول زیر آمده است.

ریسک بیز پسین	برآورد بیز	تابع عضویت
68/3814	52/116	مثلثی
68/3740	52/111	دوزنقه‌ای
68/3722	52/109	گوسی

#### ۴. نتیجه گیری

نتایج جدول بالا نشان می‌دهد که تابع عضویت گوسی مینیمم ریسک بیز پسین را نسبت به دو تابع عضویت دیگر دارد در نتیجه بهترین برآورد بیز براساس تابع عضویت گوسی بدست می‌آید.

مراجع

- [1] M. Arefi and S. M. Taheri, Possibilistic Bayesian inference based on fuzzy data, *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*. **7(5)** (2016), 753-763.
- [2] S. Lapointe and B. Bobée, Revision of possibility distributions: A Bayesian inference pattern, *Fuzzy sets and systems*. **116(2)** (2000), 119-140.
- [3] J. F. Lawless, *Statistical models and methods for life time data (Second Edition)*, John Wiley & Sons, 2003.

## یک روش برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی برای انتخاب تأمین‌کننده برون‌سپاری لجستیک

سمیه حسین پور سرخ آبادی\* و محمد شیرازیان

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه نیشابور  
shirazian@mail.neyshabur.ac.ir

چکیده. به منظور کاهش هزینه‌ها و افزایش توانمندی، بسیاری از شرکت‌ها تمایل به انتخاب برون‌سپاری لجستیک دارند. انتخاب تأمین‌کننده لجستیک نقش مهمی در موفقیت برون‌سپاری ایفا می‌کند. در این مقاله انتخاب تأمین‌کننده برون‌سپاری لجستیک را به عنوان یک نوع از مسائل تصمیم‌گیری گروهی با روابط ترجیحی فازی شهودی فرمول‌بندی می‌کنیم. سپس یک روش برنامه‌ریزی خطی فازی برای حل چنین مسائلی ارائه می‌نماییم.

### ۱. مقدمه

برون‌سپاری لجستیک یا لجستیک شخص ثالث استفاده، از شرکت‌های دیگر برای اجرای عملیات لجستیکی می‌باشد که قبلاً در یک سازمان انجام می‌شده است. این شرکت شخص ثالث می‌تواند همه یا بخشی از عملیاتی که در فرآیند لجستیک هستند، را انجام دهد.

تمرکز این مقاله، روی مرحله چگونگی انتخاب تأمین‌کننده برون‌سپاری لجستیک است. برای این منظور، ابتدا وزن‌های اولویت از روابط ترجیحی فازی شهودی از بین مدل‌های برنامه‌ریزی ساخته شده استخراج می‌شود. سپس، وزن‌های کارشناسان به صورت عینی بر اساس تکنیک TOPSIS تعیین می‌شوند؛ و در نهایت، یک مدل جدید برای تصمیم‌گیری گروهی با روابط اولویت ترجیحی فازی شهودی ارائه می‌گردد.

---

2010 Mathematics Subject Classification. 90C70; 90C05

واژگان کلیدی. برون‌سپاری لجستیک، درجه تردید، تصمیم‌گیری گروهی، رابطه ترجیحی فازی شهودی، رویکرد

خوش‌بینانه.  
\* سخنران

## ۲. روش برنامه‌ریزی فازی شهودی برای استخراج وزن‌های اولویت

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  یک مجموعه‌ی جهانی غیرتهی ثابت باشد. یک مجموعه‌ی فازی شهودی  $A$  در  $X$  به صورت  $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$  تعریف می‌شود، با تابع عضویت  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  و تابع عدم عضویت  $\nu_A : X \rightarrow [0, 1]$  با شرایط  $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ ، که  $\mu_A$  و  $\nu_A$  به ترتیب، درجه‌ی عضویت و درجه عدم عضویت  $x$  به مجموعه‌ی  $A$  را نشان می‌دهند. بعلاوه برای هر مجموعه‌ی فازی شهودی  $A$  در  $X$ ،  $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ ، درجه‌ی تردید عضو  $x$  از مجموعه‌ی  $A$  نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۲.** [۳] یک رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی  $R$  روی  $X$  با ماتریس رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی  $R = (\tilde{r}_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$ ، با  $\tilde{r}_{ij} = (\mu_{ij}, \nu_{ij})$  ارائه شده است، که در آن برای هر  $i, j = 1, 2, \dots, n$  داریم:

$$0 \leq \mu_{ij} + \nu_{ij} \leq 1, \mu_{ij} = \nu_{ji}, \mu_{ji} = \nu_{ij}, \mu_{ii} = \nu_{ii} = 0.5, \forall i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

که  $\tilde{r}_{ij}$  یک عدد فازی شهودی نامیده می‌شود.  $\mu_{ij}$  درجه‌ای است که  $x_i$  به  $x_j$  ترجیح داده شده است و  $\nu_{ij}$  درجه‌ای است که  $x_i$  به  $x_j$  ترجیح داده نشده است و  $\pi_{ij} = 1 - \mu_{ij} - \nu_{ij}$  به عنوان درجه‌ی تردیدی که  $x_i$  به  $x_j$  ترجیح داده شده است، ارائه شده است.

**تعریف ۳.۲.** فرض کنید  $\tilde{\alpha}_1 = (\mu_1, \nu_1)$  و  $\tilde{\alpha}_2 = (\mu_2, \nu_2)$  دو عدد فازی شهودی باشند. فاصله‌ی همینگ بین  $\tilde{\alpha}_1$  و  $\tilde{\alpha}_2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = \frac{1}{2} (|\mu_1 - \mu_2| + |\nu_1 - \nu_2| + |\pi_1 - \pi_2|) \quad (2.2)$$

**۱.۲.** روش برنامه‌ریزی فازی شهودی برای استخراج وزن‌های اولویت از روابط ترجیحی فازی شهودی با تصمیم‌گیری گروهی. برای یک مساله تصمیم‌گیری با مجموعه‌ی متناهی از  $n$  گزینه، فرض کنید که  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  یک مجموعه از گزینه‌ها باشد. در حالت کلی، تصمیم‌گیرنده ماتریس رابطه ترجیحی فازی شهودی،  $R = (\tilde{r}_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$  را که در رابطه (۱.۲) صدق می‌کند، برای ارائه کردن اولویت‌هایش برای هر جفت از گزینه‌ها در فرآیند تصمیم‌گیری می‌سازد.

فرض کنید  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  یک بردار وزن‌های اولویت باشد که  $w_i$  ها درجه‌ی اهمیت گزینه‌ی  $x_i$  را نشان می‌دهند، که در رابطه‌ی  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  و  $w_i \geq 0$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  صدق می‌کنند.

یک رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی  $R = (\tilde{r}_{ij})$  با  $\tilde{r}_{ij} = (\mu_{ij}, \nu_{ij})$  یک رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی سازگار است اگر و تنها اگر

$$\mu_{ij} \leq 0.5(w_i - w_j + 1) \leq 1 - \nu_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

یک راه‌حل به اندازه کافی خوب، برای پیدا کردن بردار اولویت این است که در رابطه‌ی (۳.۲) در حد امکان صدق کند. پس رابطه (۳.۲) را به این صورت در نظر می‌گیریم [۲]:

$$\mu_{ij} \leq_{IF} 0.5(w_i - w_j + 1) \leq_{IF} 1 - \nu_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

که نماد  $\leq_{IF}$ ، مقدار کوچکتر یا مساوی فازی شهودی را نشان می‌دهد. با تبدیل رابطه (۴.۲) به دو مجموعه‌ی فازی شهودی یک‌طرفه و در نظر گرفتن حالت  $i < j$  به

رابطه

$$\begin{cases} w_i - w_j \leq_{IF} 1 - 2\nu_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n; j > i, \\ w_j - w_i \leq_{IF} 1 - 2\mu_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n; j > i. \end{cases} \quad (5.2)$$

می‌رسیم. فرض کنید که  $m = n(n-1)$  باشد. پس،  $m$  محدودیت فازی می‌تواند در یک فرم متحد به این صورت مشخص شود:

$$(\mathbf{Aw})_k \leq_{IF} b_k, \quad (6.2)$$

فرض کنید  $(\mathbf{Aw})_k \leq_{IF} b_k$ ،  $k = 1, 2, \dots, m$  را برای (6.2) را امین محدودیت رابطه (6.2) را برای  $k = 1, 2, \dots, m$  نشان دهد. رویکرد خوش‌بینانه در [1]، را که به ساختار توابع عدم عضویت بستگی دارد، برای حل مدل بهینه‌ی فازی شهودی بکار می‌بریم. در این رویکرد تابع عضویت و غیرعضویت خطی برای  $k$ -امین محدودیت  $(\mathbf{Aw})_k \leq_{IF} b_k$  به ترتیب، به این صورت ساخته می‌شود:

$$\mu_k(\mathbf{w}) = \begin{cases} 0 & (\mathbf{Aw})_k > b_k + p_k, \\ 1 - \frac{(\mathbf{Aw})_k - b_k}{p_k} & b_k \leq (\mathbf{Aw})_k \leq b_k + p_k, \\ 1 & (\mathbf{Aw})_k < b_k, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\nu_k(\mathbf{w}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{Aw})_k > b_k + p_k + q_k, \\ \frac{(\mathbf{Aw})_k - b_k}{p_k + q_k} & b_k \leq (\mathbf{Aw})_k \leq b_k + p_k + q_k, \\ 0 & (\mathbf{Aw})_k < b_k, \end{cases} \quad (8.2)$$

که پارامترهای تحمل  $p_k, q_k > 0$  است و  $0 \leq \mu_k(\mathbf{w}) + \nu_k(\mathbf{w}) \leq 1$  است. تابع عضویت  $\mu_k(\mathbf{w})$ ، درجه‌ی قبولی محدودیت  $(\mathbf{Aw})_k \leq_{IF} b_k$  را نشان می‌دهد، در حالی که تابع عدم عضویت  $\nu_k(\mathbf{w})$  درجه‌ی رد محدودیت فازی شهودی  $(\mathbf{Aw})_k \leq_{IF} b_k$  را نشان می‌دهد.

فرض کنید  $\alpha = \min\{\mu_1(\mathbf{w}), \dots, \mu_m(\mathbf{w})\}$  و  $\beta = \min\{\nu_1(\mathbf{w}), \dots, \nu_m(\mathbf{w})\}$  باشد، بنابراین، وزن اولویت بهینه  $\mathbf{w}^*$  می‌تواند از ساختن مدل برنامه‌ریزی دوهدفه‌ی ماکزیم کردن درجه‌ی قبولی مینیمال محدودیت‌های  $\alpha$  و مینیم کردن درجه‌ی رد ماکسیمال محدودیت‌های  $\beta$  بدست آید، رابطه (6.2) می‌تواند به صورت مدل برنامه‌ریزی یک‌هدفه پایین تبدیل شود:

$$\max\{\alpha - \beta\}, \quad (9.2)$$

$$s.t. \quad \mu_k(\mathbf{w}) \geq \alpha \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\nu_k(\mathbf{w}) \leq \beta \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\alpha \geq \beta, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta \leq 1,$$

$$\mathbf{w} \in W.$$

با قرار دادن روابط (۷.۲) و (۸.۲) در رابطه (۹.۲) می‌توانیم مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را استخراج کنیم:

$$\begin{aligned} & \max\{\alpha - \beta\}, & (10.2) \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^n a_{kj}w_j \leq b_k + (1 - \alpha)p_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ & \quad \sum_{j=1}^n a_{kj}w_j \leq b_k + \beta(p_k + q_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ & \quad \alpha \geq \beta, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta \leq 1, \\ & \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad w_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

با حل مسأله برنامه‌ریزی خطی بالا، جواب بهینه‌ی  $(\mathbf{w}^*, \alpha^*, \beta^*)$  می‌تواند بدست آید.

۲.۲. یک روش جدید برای تصمیم‌گیری گروهی با روابط ترجیحی فازی شهودی. برای یک مسأله تصمیم‌گیری گروهی با مجموعه‌ی متناهی  $n$  گزینه‌ای، فرض کنید  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_g\}$  یک مجموعه از کارشناسان باشد و  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  یک مجموعه از گزینه‌ها باشد. هر کارشناس قادر است که روابط فازی شهودی فردی  $R = (\tilde{r}_{ij}^t)_{n \times n} \quad [t = 1, 2, \dots, g]$  را ارائه دهد، که  $(\tilde{r}_{ij}^t)_{n \times n} = (\mu_{ij}^t, \nu_{ij}^t)$  یک عدد فازی شهودی متناظر با کارشناس  $e_t$  است، که در تعریف ۲.۲ صدق می‌کند. روش تصمیم‌گیری گروهی باید مرحله به مرحله مشخص شود: مرحله ۱: وزن‌های کارشناسان را با استفاده از تکنیک TOPSIS [۲] مشخص کنید. مرحله ۲: با استفاده از روش [۳] با جمع‌آوری همه‌ی اعضای ماتریس  $R^t = (\tilde{r}_{ij}^t)_{n \times n}$ ، برای  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ، ماتریس رابطه ترجیحی فازی شهودی جمعی  $R = (\tilde{r}_{ij})_{n \times n}$  را به این صورت بدست آورید:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{ij} &= (\mu_{ij}, \nu_{ij}), \\ \mu_{ij} &= \sum_{t=1}^g \lambda_t \mu_{ij}^t, \quad \nu_{ij} = \sum_{t=1}^g \lambda_t \nu_{ij}^t, \quad \mu_{ii} = \nu_{ii} = 0.5, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

که  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g)^T$  بردار وزن کارشناسان (تصمیم‌گیرندگان) است. مرحله ۳: مطابق ماتریس  $R = (\tilde{r}_{ij}^t)_{n \times n}$  بردار وزن‌های اولویت گزینه‌ها را با حل رابطه (۱۰.۲) متناظر با رویکرد خوش‌بینانه استخراج کنید. مرحله ۴: گزینه‌ها را با توجه به وزن‌های اولویت مرتب کنید و بهترین آنها را انتخاب کنید.

### مراجع

1. D. Dubey, S. Chandra and A. Mehra, *Fuzzy linear programming under interval uncertainty based on IFS representation*, Fuzzy Sets Syst.(2012), 188, 68–87.
2. S.P. Wan, F. Wang, L.L. Lin and J.Y. Dong, *An intuitionistic fuzzy linear programming method for logistics outsourcing provider selection*, Knowledge-Based Systems.(2015), 82, 80–94.
3. Z.S. Xu and R.R. Yager, *Intuitionistic and interval-valued intuitionistic fuzzy preference relations and their measures of similarity for the evaluation of agreement within a group*, Fuzzy Optim. Decis. Making, (2009), 8, 123–139.

## کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی پیوسته با ضرایب بازه‌ای

هادی شکوهی امیری\* و سید مهدی میرحسینی عالیزمینی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران

*h.shokoohi53@gmail.com*

*mirhosseini.alizamini@gmail.com*

چکیده. این مقاله به مطالعه و بررسی سیستم‌های خطی با ضرایب بازه‌ای زمان پیوسته می‌پردازد. هم‌چنین، مفاهیم کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری این سیستم‌ها مورد توجه قرار می‌گیرند. با استفاده از یک تغییر متغیر و با در نظر گرفتن بازه اعداد حقیقی به صورت تابعی از متغیر  $t$  سیستم خطی پیوسته با ضرایب بازه‌ای به یک سیستم خطی پیوسته زمان متغیر تبدیل می‌شود. کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری این گونه سیستم‌ها نیز مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند. در نهایت، برای نمایش دقت و کارایی روش، مثال عددی ارائه شده‌اند.

### ۱. مقدمه

مسائل مربوط به کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری هدف‌هایی که مدل‌های آن‌ها، نامعین‌های بازه‌ای ناشی شده از نظریه کنترل اتوماتیک، معادلات دیفرانسیل، نظریه کنترل، تحقیق در عملیات و سایر حوزه‌های مهندسی و علوم طبیعی را شامل می‌گردد. مورد اهمیت می‌باشد. در [۴] یک مسأله کنترل بهینه تصادفی با شرایط نامعین و داده‌های تصادفی ارائه گردیده است. در [۴] کنترل‌پذیری سیستم‌های گسسته با ضرایب بازه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. این مقاله سیستم‌های خطی پیوسته به طوری که ضرایب متغیرهای حالت و کنترل در آن‌ها به صورت بازه‌ای از اعداد حقیقی می‌باشند، کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری این نوع سیستم‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. زمان این سیستم‌ها در این مقاله در بازه  $[0, 1]$  در نظر گرفته شده است. یعنی بازه زمانی کلی

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49J15; Secondary 49N05, 34H05, 93C05.

واژگان کلیدی. سیستم خطی پیوسته، کنترل‌پذیری، مشاهده‌پذیری.  
\* سخنران

سیستم  $(t_0, t^*)$  در بازه  $[0, 1]$  قرار دارد.

هر بازه اعداد حقیقی به صورت یک تابع پارامتری زیر در نظر گرفته می‌شود [۲]:

$$A = [a^L, a^R] = \{a(t) | a(t) = a^L + t(a^R - a^L), 0 \leq t \leq 1\} \quad (1.1)$$

## ۲. کنترل پذیری و مشاهده پذیری

سیستم خطی پیوسته با ضرایب بازه ای به فرم زیر را در نظر بگیرید، که در آن  $x \in \mathcal{R}^n$  متغیر حالت،  $u \in \mathcal{R}^p$  متغیر کنترل  $A \in (I(\mathcal{R}))^{n \times n}$ ،  $B \in (I(\mathcal{R}))^{n \times p}$ ،  $C \in (I(\mathcal{R}))^{p \times n}$  و  $D \in (I(\mathcal{R}))^{p \times p}$  ماتریس‌هایی که درایه‌هایشان بازه‌هایی از اعداد حقیقی هستند، می‌باشند.  $(0 \leq t \leq 1)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ v = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

در سیستم (۱.۲) هرگاه به جای هر بازه اعداد حقیقی، طبق (۱.۱) یک تابع پارامتری جایگزین گردد، از اینرو یک سیستم خطی پیوسته با ضرایب پارامتری به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ v = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

در (۲.۲) معادله اول را معادله حالت ورودی با حالت اولیه  $x(t_0) = x_0$  است و طبق معادلات دیفرانسیل معمولی دارای جواب منحصر بفرد به صورت زیر می‌باشد.

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, s)B(s)u(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.2)$$

که در آن  $\phi(t, t_0)$  ماتریس انتقال می‌باشد و طبق قاعده پیکارد [۱] بدست می‌آید.

تعریف ۱.۰۲. سیستم  $\varphi$  با توصیف فضای حالت (۲.۲) را کنترل پذیر گویند اگر و تنها اگر از هر مکان اولیه  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  بتوان بردار حالت  $x$  را از زمان اولیه  $t_0 \in [0, 1]$  توسط یک کنترل  $u$  از رده توابع قابل قبول کنترل در یک مدت زمان متناهی به نقطه  $0 \in \mathcal{R}^n$  انتقال داد. بعبارت دیگر به ازای مقادیر دلخواه  $x_0 \in \mathcal{R}^n$ ،  $t_0 \in [0, 1]$  و  $t_1 \geq t_0$ ،  $t_1 \in [0, 1]$  موجود باشند بطوریکه معادله انتگرالی (۳.۲) جوابی در رده توابع کنترل قابل قبول داشته باشد.

$$\phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t, s)B(s)u(s)ds = 0, \quad (4.2)$$

برای بررسی کنترل پذیری و وجود جواب (۴.۲) یک بازه کلی به صورت  $t_0, t^*$  به طوری که  $t^* \in [0, 1]$  را در نظر بگیرید و هرگاه به ازای  $t^*$  و  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  عبارت (۴.۲) دارای جواب باشد، از اینرو به ازای هر  $t_1 < t^*$  و  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  عبارت (۴.۲) نیز دارای جواب می‌باشد [۱].

تعریف ۲.۰۲. سیستم (۲.۲) دارای خاصیت مشاهده پذیری روی بازه  $[0, 1] \supset (t, t_0)$  می‌باشد اگر و تنها اگر ورودی و خروجی  $(u(t), v(t))$ ،  $t_0 \leq t \leq t_1$  به طور منحصر بفرد حالت اولیه  $x(t_0)$  را تعیین نماید.

کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی پیوسته با ضرایب بازه‌ای

**تعریف ۳.۲.** سیستم (۲.۲) را در زمان اولیه  $t_0 \in [0, 1]$  مشاهده پذیر گویند اگر و تنها اگر روی بازه  $(t_0, t_1)$  که  $t_1 > t_0$  و  $t_1 \in [0, 1]$  دارای خاصیت مشاهده پذیر باشد.

برای بررسی کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم خطی پیوسته با ضرایب بازه ای (۱.۲) کفایت کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم خطی پیوسته زمان متغیر (۲.۲) را بررسی نمایید. سیستم (۲.۲) به ازای هر  $t \in [0, 1]$  کنترل پذیر باشد، در نتیجه سیستم (۱.۲) کنترل پذیر می باشد و سیستم (۲.۲) در  $t_0 \in [0, 1]$  مشاهده پذیر باشد، در نتیجه سیستم (۱.۲) نیز در  $t_0 \in [0, 1]$  مشاهده پذیر می‌باشد.

تبدیل خطی  $Q_t = \int_{t_0}^t \phi(t, s)B(s)B^T(s)\phi^T(t, s)ds$  را در نظر بگیرید. این تبدیل خطی  $t$  را به یک ماتریس  $n \times n$  تبدیل می‌نماید. برای کنترل‌پذیری سیستم (۲.۲) از ماتریس  $Q_t$  استفاده نمایید.

**قضیه ۴.۲.** فرض کنید  $\varphi$  یک سیستم خطی زمان پیوسته با زمان کلی  $J \subset (t_0, t^*)$  باشد. سیستم  $\varphi$  با زمان اولیه  $t_0$  کنترل پذیر پذیر می‌باشد اگر و تنها اگر ماتریس  $Q_{t^*}$  نامنفرد باشد.

برهان. برای اثبات قضیه به مرجع [۱] مراجعه شود. در این مقاله  $J = [0, 1]$  در نظر گرفته می‌شود. برای نشان دادن اینکه سیستم  $\varphi$  به ازای هر بازه زمانی کلی  $J \subset (t_0, t^*)$  کنترل پذیر می باشد، بایستی ماتریس  $Q_t$  به ازای هر  $t \in (0, 1)$  نامنفرد باشد.  $\square$

ماتریس  $P_t = \int_{t_0}^t \phi^T(s, t_0)C^T(s)C(s)\phi(s, t_0)ds$  به طوری که یک ماتریس  $n \times n$  می‌باشد را در نظر بگیرید.

**قضیه ۵.۲.** سیستم خطی در زمان اولیه  $t_0$  مشاهده پذیر می‌باشد اگر و تنها اگر ماتریس  $P_t$  به ازای مقادیری از  $t > t_0$  نامنفرد باشد.

برهان. برای اثبات قضیه به مرجع [۱] مراجعه شود.  $\square$

**مثال ۶.۲.** سیستم خطی پیوسته با ضرایب بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = [0, 1]x(t) + [0, 1]u(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ \dot{x}_2(t) = [0, 1]u(t) \\ v = [0, 2]x_2(t) \end{cases}$$

در این سیستم خطی پیوسته ماتریس‌های  $C, B, A$  به صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & [0, 1] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} [0, 1] \\ [0, 1] \end{bmatrix}, \quad C = [[0, 2] \quad 0],$$

با استفاده از تعریف بازه عدد حقیقی برحسب یک تابع تک متغیره  $t$ ،  $(0 \leq t \leq 1)$  ماتریس‌های فوق به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad C = [2t \quad 0],$$



د. شکوهی امیری و س.م. میرحسینی عالیزمینی

با استفاده از روش پیکارد، ماتریس انتقال به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2 - t_0^2}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0$$

بنابراین دترمینان ماتریس  $|Q_t| = \frac{3}{7}t^{10} + 5t^8$  به ازای هر  $t \in (0, 1]$  مخالف صفر است و از اینرو سیستم خطی پیوسته بازه ای کنترل پذیر می‌باشد. همچنین دترمینان ماتریس  $|P_t| = \frac{16}{525}t^{10}$  به ازای هر  $t \in (0, 1]$  مخالف صفر است و از اینرو سیستم خطی پیوسته بازه ای مشاهده پذیر در زمان اولیه  $t_0 = 0$  می‌باشد.

### نتیجه گیری

در این مقاله کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم‌های خطی پیوسته که زمان پیوسته آن‌ها در  $[0, 1]$  قرار دارد، مورد بررسی قرار گرفت. در نتیجه بایستی روش‌هایی را ارائه نمود که کنترل پذیری و مشاهده پذیری این سیستم‌ها را برای هر زمان پیوسته  $t$  مورد بحث قرار نمود. ضمناً روش‌های را پیشنهاد نمودند که بتوانند در سیستم‌های گسسته و پیوسته مورد استفاده قرار گیرند.

### مراجع

1. L.T. Ashchepkov, *The Controllability of an Interval Linear Discrete System*, Journal of Computer and Systems Sciences International, **46** no. 3 (2007), 399-406.
2. A.K. Bhurjee and G. Panada, *Efficient solution of interval optimization problem*, Math Meth Oper Res. **76** (2012), 273-288.
3. C.K. Chui and G. Chen, *Linear Systems and Optimal Control*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
4. M.H.A. Davis, *Linear Estimation and Stochastic Control*, Chapman and Hall, London 1984.
5. A.B. Kurzhanskii, *Control and Observation under Conditions of Uncertainty*, Nauka, Moscow, 1977.

## حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی ولترا با استفاده از توابع ترکیبی از چندجمله‌ای برنشتاین و توابع بلاک-پالس

انسیه عباسی\*، امید باغانی، و سعیده غفوری

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری

n30abasi@gmail.com

omid.baghani@gmail.com

saeide.gh.70@gmail.com

چکیده. در این مقاله به ارائه روشی برای حل رده‌ای از معادلات انتگرالی از نوع ولترا می‌پردازیم، به این منظور، ما از ترکیب توابع برنشتاین BPs و توابع بلاک-پالس BFs روی بازه  $[0, 1]$  برای تغییر این مساله به یک مساله بهینه‌سازی که به آسانی با روش‌های برنامه‌ریزی حل شود، استفاده می‌کنیم. مثالی عددی نیز ارائه شده است که دقت و کارایی روش را نشان می‌دهد.

### ۱. مقدمه

تئوری کلاسیک از کنترل بهینه در ابتدا با کارکردن روی سیستم‌های کنترلی معادلات دیفرانسیل معمولی آغاز شد. رده‌ای از سیستم‌های کنترل شده با معادلات دیفرانسیل معمولی در اقتصاد، زیست‌شناسی و... را می‌توان با کنترل ولترا<sup>۱</sup> مدل کرد. زیرا پیچیده‌ترین برنامه‌های کاربردی در مسائل کنترل بهینه با روش‌های عددی حل می‌شود که بلمن<sup>۲</sup> در سال ۱۹۵۰ میلادی شروع‌کننده‌ی این کار بود. از جمله روش‌ها برای حل مساله کنترل بهینه به کمک معادلات انتگرالی ولترا عبارتند از: روش اختلال هموتویی و روش چندجمله‌ای‌های لژاندر، روش چندجمله‌ای پیش‌ف و توابع متعامد مثلثی

### ۲. آنالیز روش

حالت کلی مساله کنترل بهینه بصورت

$$\text{Min } J(x, u) = \int_0^T \Psi(t, x(t), u(t)) dt,$$

$$\text{s.t. } x(t) = y(t) + \lambda \int_0^t k(s, t, u(s))x(s) ds,$$

واژگان کلیدی. مسئله کنترل بهینه، توابع بلاک-پالس، چندجمله‌ای‌های برنشتاین.

\* سخنران

<sup>۱</sup> Volterra

<sup>۲</sup> Bellman

که محدودیت رده ای از معادلات انتگرالی از نوع ولترا (VIEs) است. که  $x(s)$  تابع مسیر و  $u(s)$  تابع کنترل است. [1] کنترل پیوسته معین  $u(t)$  معلوم است،  $VIE$  پس یک جواب منحصر به فرد و پیوسته دارد. مساله کنترل بهینه،  $u(t)$  و  $x(t)$  را طوری تعیین می‌کند که  $J(x, u)$  مینیمم شود.  $J(x, u) = u(t)^2 + x(t)^2 + f(t)x(t) + g(t)u(t)$ .  $f(t)$  و  $g(t)$  توابع حقیقی مقدار در  $L^2[0, 1]$  هستند. در ادامه مقاله،  $T = 1$  فرض شده و همچنین فرض بر این است که کنترل بهینه مساله منحصر به فرد است.

**تعریف ۱.۲.** چندجمله‌ای‌های برنشتاین از  $M$  امین درجه روی بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند،  $m = 0, 1, \dots, M$ ،

$$B_{M,m}(t) = \binom{M}{m} t^m (1-t)^{M-m},$$

**تعریف ۲.۲.**  $N$  - مجموعه از توابع بلاک-پالس<sup>۳</sup> بر بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر است

$$b_n(t) = \begin{cases} 1 & \frac{n-1}{N} \leq t < \frac{n}{N}. \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

**تعریف ۳.۲.** توابع ترکیبی  $h_{nm}(t)$ ،  $n = 1, 2, \dots, N$  و  $m = 1, 2, \dots, M$  به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$h_{n,m}(t) = \begin{cases} B_{m,M}(Nt - n + 1) & , \frac{n-1}{N} \leq t < \frac{n}{N}. \\ 0 & , \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که  $n, m$  به ترتیب توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های برنشتاین هستند.

**۱.۲.** تقریب توابع. تابع  $f(t) \in L^2[0, 1]$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M c_{n,m} h_{n,m}(t) = C^T H(t), \quad (1.2)$$

$$C = [c_{10}, \dots, c_{1M}, c_{20}, \dots, c_{2M}, \dots, c_{N0}, \dots, c_{NM}]^T,$$

$$H(t) = [h_{10}(t), \dots, h_{1M}(t), h_{20}(t), \dots, h_{2M}(t), \dots, h_{N0}(t), \dots, h_{NM}(t)]^T,$$

$$C = D^{-1} \langle f(t), H(t) \rangle, \quad (2.2)$$

که  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  یک ضرب داخلی استاندارد روی است و یک ماتریس دوگان است.

### ۳. پارامتر کنترل و مسیر

**۱.۳.** تقریب سیستم دینامیک. مساله کنترلی معادلات انتگرالی ولترا (۲) را در نظر بگیرید. تقریب  $x(s)$  و  $u(s)$  با توجه به معادله (۱.۲) به صورت زیر است

$$x(s) \simeq x_r(s) = X^T H(s), \quad (1.3)$$

$$u(s) \simeq u_{r'}(s) = U^T H(s), \quad (2.3)$$

با جایگذاری معادله (۱.۳) در معادله (۲) و با مرتب کردن نقاط هم‌محل لژاندر-گاوس داریم

$$A^r(u)X = Y, \quad (3.3)$$

<sup>۳</sup> Block-pulse functions

جایی که  $Y = [y(t_1), \dots, y(t_r)]^T$  و  $A^r(u)$  یک ماتریس  $r \times r$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود.  $A^r(u) = [a_1^r, \dots, a_r^r]^T$ ,  $a_i^r = H(t_i) - \lambda \int_0^{t_i} k(s, t_i, u(s))H(s) ds$ .  
 با حل سیستم (۳.۳) و محاسبه  $X$ ، جواب تقریبی معادله (۲) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_r(t; u) = X^T H(s). \quad (۴.۳)$$

اگر رتبه  $A^r(u) = \text{rank}[A^r(u); Y] = r$ ، ما بدست می‌آوریم  $X = (A^r(u))^{-1}Y$ . ضرایب ترکیبی مجهول بردار  $X$  منحصر به فرداند. پس سیستم (۲) نیز جواب منحصر به فرد دارد. برای بدست آوردن یک کنترل پیوسته مناسب، معادله (۲.۳) را در (۳.۳) جایگذاری می‌کنیم، پس سیستم زیر را داریم

$$A_{r,r}^r(U)X = Y, \quad (۵.۳)$$

$$a_i^{r'} = H(t_i) - \lambda \int_0^{t_i} k(s, t_i, U^T H(s))H(s) ds, \quad A_{r,r}^r(U) = [a_1^{r'}, \dots, a_r^{r'}]^T. \quad (۶.۳)$$

برای تقریب انتگرال از قاعده ی کوادراتیک، که شامل معادلات بالاست، استفاده می‌کنیم. برای این منظور، یک تبدیل خطی ساده باید ساخته شود. بنابراین  $r$  بازه‌های  $[0, t_i]$  با تغییر متغیر  $s = t_i \tau$  به بازه ی  $[0, 1]$  انتقال دادیم، برای  $i = 1, 2, \dots, r$ ، داریم

$$a_i^{r'} = H(t_i) - \lambda t_i \int_0^1 k(t_i \tau, t_i, U^T H(t_i \tau))H(t_i \tau) d\tau. \quad (۷.۳)$$

با کوادراتیک گاوسی معادله (۷.۳) تبدیل به

$$a_i^{r'} = H(t_i) - \lambda t_i \sum_{j=0}^{r-1} w_j k(t_i \tau_j, t_i, U^T H(t_i \tau_j))H(t_i \tau_j) \quad (۸.۳)$$

که  $w_j$  و  $\tau_j$  یال‌ها و وزن‌ها در بازه ی  $[0, 1]$  هستند. با استفاده از این روش، معادلات کنترلی انتگرالی ولترا (۲) به معادلات جبری غیر خطی کاهش می‌یابد.

۲.۳. تقریب شاخص عملکرد. برای تقریب تابع هدف (۲)،  $f(t)$  و  $g(t)$  را با استفاده از معادله (۱.۲) به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$f(t) \simeq f_r(t) = F^T H(t), \quad g(t) \simeq g_r(t) = G^T H(t) \quad (۹.۳)$$

با جایگذاری معادله (۹.۳) در تابع هدف و با استفاده از معادله (۲) تقریب کنترل و معادله حالت به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\min J_r(X, U) = X^T DX + U^T DU + F^T DX + G^T DU \quad (۱۰.۳)$$

$$s.t. A_r^r X = Y. \quad (۱۱.۳)$$

۳.۳. مثال. مساله کنترل بهینه غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [2]

$$J(x, u) = \int_0^1 [(x(t) - t - 1)^2 + (u(t) - t^2 - t)^2] dt,$$

$$x(t) = y(t) + \int_0^t st^2 u(s)x(s) ds,$$

جدول ۱: خطای مطلق از  $u(t)$  در نقاط انتخابی

$t_i$	روش فعلی $N = M = 4$	روش [24] $p = 32$	روش [34] $m = 32$
۰,۰	۰,۲۰۰۷e-۱۵	۰,۰۱۴۴	۰,۲۳۹۹
۰,۱	۰,۰۶۹۴e-۱۵	۰,۰۰۹۴	۰,۰۰۹۴
۰,۲	۰,۰۸۳۳e-۱۵	۰,۰۰۳۴	۰,۰۰۳۱
۰,۳	۰,۳۳۳۱e-۱۵	۰,۰۰۴۱	۰,۲۴۵۶
۰,۴	۰,۱۱۱۰e-۱۵	۰,۰۰۹۵	۰,۰۰۹۴
۰,۵	۰,۷۷۷۲e-۱۵	۰,۲۵۰۳	۰,۴۳۳۰
۰,۶	۰	۰,۰۰۹۴	۰,۱۲۸۸
۰,۷	۰,۲۲۲۰e-۱۵	۰,۰۰۳۱	۰,۰۰۵۰
۱/۰,۸	۰,۵۵۵۱e-۱۵	۰,۰۰۳۱	۰,۰۱۷۳
۰,۹	۰,۱۱۱۰e-۱۵	۰,۰۰۹۴	۰,۰۲۹۷

که  $y(t) = -\frac{1}{5}t^7 - \frac{1}{2}t^6 - \frac{1}{3}t^5 + t + 1$  است،  $x^*(t) = t + 1$  و  $u^*(t) = t^2 + t$  مسیر بهینه و کنترل بهینه تقریبی‌اند. مجموعه  $N = M = 2$ . اگر  $x(t) \simeq x_{23} = X^T H(t)$  و  $u(t) \simeq u_{23} = U^T H(t)$  جواب تقریبی از مساله کنترل بهینه با توابع ترکیبی باشد. از (۱۰.۳)، معادله ماتریس اساسی از عملکرد شاخص است

$$J(X, U) = X^T DX + F^T DF - 2F^T DX + U^T DU + G^T DG - 2G^T DU,$$

جاییکه  $F$  و  $G$  ماتریس‌هایی از ضرایب ترکیبی به ترتیب  $t+1$  و  $t^2+t$  هستند. پس از قرار دادن  $F$  و  $G$  و نقاط منظم در (۸.۳) برای این مثال و استفاده از قاعده لژاندر-گاوس، معادله ماتریس اساسی (۸.۳) به صورت  $X^T H(t_i) = y(t_i) + t_i^4 \sum_{j=0}^5 w_j \tau_j U^T H(t_i \tau_j) X^T H(t_i \tau_j)$  پس، مساله کنترل بهینه به یک مساله بهینه سازی غیر خطی کاهش می‌یابد. بعد از حل مساله با الگوریتم  $SQP$ ، گرفتیم

$$X^T = [1, 1.25, 1.5, 1.5, 1.75, 2], \quad U^T = [0, 0.25, 0.75, 0.75, 1.25, 2]$$

$x_{23}(t) = t + 1$  و  $u_{23}(t) = t^2 + t$  به ترتیب مسیر بهینه دقیق و توابع کنترل بهینه هستند.

#### ۴. دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله به ارائه یک روش برای حل مساله کنترل بهینه با استفاده از توابع ترکیبی با روش منظم پرداختیم. مساله به یک پارامتر با بعد محدود مساله بهینه سازی کاهش داده شده است که می‌تواند با بسیاری از الگوریتم‌های مؤثر مانند الگوریتم حل شود.

#### مراجع

1. M. Alipour, D. Baleanu, F. Babaei, *Hybrid Bernstein block-pulse functions method for second kind integral equations with convergence analysis*, Abstr. Appl. Anal. 2014 (2014) 1–8. Hindawi Publish. Co..
2. A.H. Borzabadi, M. Azizsefat, O.S. Fard, *An iterative scheme for optimal control of linear Volterra integral equations*, J. Adv. Res. Dyn Control Syst. 2 (2) (2010) 13–25.
3. G. Tachev, *Pointwise approximation by Bernstein polynomials*, Bull. Aust. Math. Soc. 85 (3) (2012) 353–358

## حل مسائل اولیه-دوگان برای مسائل جریان شبکه‌ای

سعیده غفوری\*، امید باغانی، و انسیه عباسی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری  
saeide.gh.70@gmail.com  
omid.baghani@gmail.com  
n30abasi@gmail.com

چکیده. در این مقاله ما الگوریتم اولیه - دوگان را برای مسائل تک‌هدفه جریان شبکه‌ای بکار می‌بریم. الگوریتم سیمپلکس اولیه - دوگان در انواع مختلفی از برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه مورد استفاده قرار گرفته است. در پایان مثالی عددی ارائه شده است که کارایی روش را نشان می‌دهد.

### ۱. مقدمه

منظور از بهینه‌سازی یک سامانه، کمینه یا بیشینه کردن تابعی است که این تابع معیاری از عملکرد سامانه می‌باشد، که در نهایت به بهبود کارایی سامانه می‌انجامد. مسأله بهینه‌سازی در حقیقت یافتن جواب یا جواب‌هایی بر روی یک مجموعه از گزینه‌های امکان پذیر (رعایت قیود مسأله) با هدف بهینه کردن معیار یا معیارهای مسأله است.

### ۲. آنالیز روش

حالت کلی مساله می‌نیم هزینه جریان شبکه‌ای عبارتست از:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{(k,j) \in \mathcal{A}} x_{kj} - \sum_{(i,k) \in \mathcal{A}} x_{ik} = b_k \quad \forall k \in V \quad (1) \\ & x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \\ & x_{ij} \geq l_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

واژگان کلیدی. مسئله جریان شبکه‌ای، می‌نیم هزینه، دوگان.  
\* سخنران

این مساله را ظرفیت‌دار می‌گویند زیرا که یال‌های آن از بالا کران‌دار می‌باشند.  
**دوگان مساله**

دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in \mathcal{V}} b_k \pi_k - \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} u_{ij} \mu_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \pi_i - \pi_j - \mu_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \\ & \mu_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (2)$$

که بردار  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$  بردار متغیرهای دوگان وابسته به قیدهای

$$\sum_{(k,j) \in \mathcal{A}} x_{kj} - \sum_{(i,k) \in \mathcal{A}} x_{ik} = b_k,$$

و بردار  $\mu = (\mu_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{A}}$  بردار متغیرهای دوگان وابسته به قیدهای  $x_{ij} \leq u_{ij}$  می‌باشد. اینک فرض می‌کنیم  $x$  و  $(\pi, \mu)$  جوابهای شدنی مسائل اولیه و دوگان باشند. می‌دانیم که این جواب‌ها به ترتیب برای مسائل اولیه و دوگان بهینه‌اند اگر و فقط اگر تابع هدف دو مساله برابر باشند. مساله اولیه (1) و دوگان آن (2) از مساله کمترین هزینه جریان شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم. فرض کنید بردار  $(\pi, \mu)$  یک جواب شدنی برای مساله دوگان (2) باشد. این جواب بایستی در قید  $\pi_i - \pi_j - \mu_{ij} \leq c_{ij}$  برای همه  $(i, j) \in \mathcal{A}$  صدق کند. [2] به عنوان مثال  $\pi = 0, \mu = 0$  یک جواب شدنی است. با استفاده از شرایط مکمل زائد برای بهینگی لازم است که: اگر  $\pi_i - \pi_j \neq c_{ij}$  آنگاه  $x_{ij} = 0$  یا  $x_{ij} = u_{ij}$ . فرض کنیم  $\mathcal{A}^=$  مجموعه یال‌هایی مانند  $(i, j)$  باشند که  $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$  یعنی مجموعه‌ای از یال‌ها با هزینه کاهش یافته صفر.

برای یال‌هایی که در مجموعه  $\mathcal{A}^=$  قرار نمی‌گیرند، اگر  $c_{ij} - \pi_i + \pi_j > 0$  آنگاه  $x_{ij} = 0$  خواهد بود و اگر  $c_{ij} - \pi_i + \pi_j < 0$  آنگاه  $x_{ij} = u_{ij}$ ، مجموعه‌های  $L$  و  $U$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = \{(i, j) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^= : x_{ij} = 0\},$$

$$U = \{(i, j) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^= : x_{ij} = u_{ij}\}.$$

اینک مساله محدود شده اولیه را به صورت زیر می‌نویسیم. این مساله تلاش می‌کند تا فقط با استفاده از یال‌های موجود در  $\mathcal{A}^=$ ، یک جواب شدنی برای مساله کمترین هزینه جریان شبکه‌ای (1) پیدا کند.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{k \in \mathcal{V} \setminus \{1\}} y_k \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{(1,j) \in \mathcal{A}^=} x_{1j} - \sum_{(i,1) \in \mathcal{A}^=} x_{i1} + \sum_{k=2}^m (-1)^{t_k} y_k = b'_1, \\ & \sum_{(k,j) \in \mathcal{A}^=} x_{kj} - \sum_{(i,k) \in \mathcal{A}^=} x_{ik} - (-1)^{t_k} y_k = b'_k, \quad \forall k \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, \\ & x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}^=, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}^=, \\ & y_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3)$$

جایی که:

$$t_k = \begin{cases} 1 & \text{if } b'_k \geq 0 \\ 0 & \text{if } b'_k \leq 0 \end{cases}$$

مقدار عرضه و تقاضای  $b'_k$ ،  $k \in \mathcal{V}$  از روی  $b_k$  با استفاده از معادله زیر بدست می‌آیند:

$$b'_k = b_k + \sum_{(i,k) \in U} x_{ik} - \sum_{(k,i) \in U} x_{ki}.$$

ذاتا مساله (3) یک مساله کمترین هزینه جریان شبکه‌ای، روی شبکه معینی است. در این شبکه فقط یال‌های موجود در  $\mathcal{A}^=$  به کار گرفته اولین گره را به عنوان گره ریشه در نظر می‌گیریم و متغیرهای مصنوعی  $(k, 1)$  (اگر  $b_i \geq 0$ ) یا  $(1, k)$  (اگر  $b_i < 0$ ) به شبکه اصلی اضافه می‌شوند هزینه این متغیرهای مصنوعی یک می‌باشد. علاوه بر این، یک گره صفر و یال  $(0, 1)$  با هزینه صفر اضافه شده است. [1]

فرض کنیم  $(\hat{x}, \hat{y})$  جواب بهینه مساله (3) باشد. اگر مقدار تابع هدف  $\hat{z}$  از مساله محدود شده (3) برابر صفر باشد، جواب  $x^*$  به طوری که  $x_{ij}^* = \hat{x}_{ij}$  برای تمام  $(i, j) \in \mathcal{A}^=$ ،  $x_{ij}^* = 0$  یا  $x_{ij}^* = u_{ij}$  برای یال‌های باقیمانده در  $\mathcal{A}$  (آنگونه که قبلاً تعریف شد)، یک جواب شدنی برای مساله اولیه (1) می‌باشد. چون تمام متغیرهای مصنوعی در سطح صفر باقی می‌مانند. علاوه بر این  $(\pi, \mu)$  یک جواب دوگان شدنی است. اکنون چون شرایط مکمل زائد برقرار است،  $x^*$  یک جواب بهینه برای (1) می‌باشد. از طرف دیگر، اگر  $\hat{z} > 0$ ، جواب بدست آمده  $\hat{x}$  یک جواب شدنی برای مساله اصلی (1) نیست.

در این هنگام یا بایستی یک جواب دوگان شدنی جدید که تابع هدف (2) را بهبود دهد، پیدا کرد یا اینکه حکم به نشدنی بودن مساله اولیه داد. چون  $(\hat{x}, \hat{y})$  یک جواب بهینه برای مساله کمکی (3) با یال‌های موجود در  $\mathcal{A}^=$  است، لذا بایستی یالی جدید به  $\mathcal{A}^=$  اضافه گردد تا تابع هدف در مساله کمکی (3) را کاهش دهد. دوگان مساله (3) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in \mathcal{V}} b'_k \pi_k - \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} u_{ij} \mu_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \pi_i - \pi_j - \mu_{ij} \leq 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad (4) \\ & \pi_1 \geq 0, \\ & (-1)^{t_k} \pi_1 - (-1)^{t_k} \pi_k \leq 1 \quad \forall k = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

فرض کنیم  $(\hat{\pi}, \hat{\mu})$  یک جواب بهینه برای این مساله باشد و  $(\pi', \mu')$  یک جواب جدید برای مساله اصلی دوگان (2) به صورت زیر باشد:

$$\pi' = \pi + \theta \hat{\pi},$$

$$\mu' = \mu + \theta \hat{\mu},$$

این جواب جدید یک جواب دوگان شدنی تشکیل می‌دهد اگر  $\theta$  در سطح صفر باقی بماند.

$$((i, j) \in L, \hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j < 0).$$

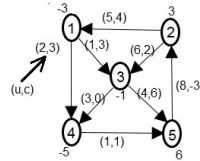


می‌دانیم که: اگر  $(i, j) \in L$  یعنی:  $c_{ij} - \pi_i + \pi_j > 0$ ، و اگر  $(i, j) \in U$  یعنی:  $c_{ij} - \pi_i + \pi_j < 0$  از این رو  $\theta$  به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\theta = \min \left\{ \frac{c_{ij} - \pi_i + \pi_j + \mu_{ij}}{\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j - \mu_{ij}} : \left( (i, j) \in L_q, \hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j > 0 \right) \left( (i, j) \in U_q, \hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j < 0 \right) \right\}.$$

حداقل  $(i, j) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^=$  وجود خواهد داشت که در تکرار بعدی به  $\mathcal{A}^=$  اضافه گردد. در تکرار بعدی مجموعه به‌هنگام شده  $\mathcal{A}^=$  با تمام یال‌هایی که در شرط  $\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j = c_{ij}$  صدق می‌کنند، به کار گرفته می‌شود. مساله جدید محدود شده دوباره حل می‌گردد. روند تا زمانی که  $\hat{z} = 0$  ادامه پیدا می‌کند. اگر شرط  $\hat{z} = 0$  محقق نگردد یعنی یالی مانند  $(i, j) \in L$  به طوری که  $\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j > 0$  یا  $(i, j) \in U$  به طوری که  $\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_j < 0$  پیدا نشد، مساله آغازین (1) نشدنی می‌باشد. [3]

مثال: مساله جریان شبکه‌ای زیر را در نظر بگیرید. (شکل (1))



شکل ۱: مساله جریان شبکه

برچسب‌های روی هر یال عبارتند از:  $(u, c)$ . برای این مثال، کمترین هزینه جریان شبکه‌ای را با توجه به الگوریتم اولیه-دوگان بدست می‌آوریم: شرط توقف  $z^* = 0$  بود که بعد از ۵ تکرار به آن رسیدیم و جوابها به شرح زیرند:

$$\{x_{14}^* = 2, x_{21}^* = 5, x_{23}^* = 4, x_{34}^* = 3, x_{52}^* = 6, x_{13}^* = 0, x_{35}^* = 0, x_{45}^* = 0\}$$

در تکرار پنجم  $L_5, U_5, \mathcal{A}_5^=$  عبارتند از:

$$L_5 = \{(1, 3), (3, 5), (4, 5)\}, \quad U_5 = \emptyset, \quad \mathcal{A}_5^= = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 2)\}$$

$$\text{و مقدار } b'^5 = \{-3, 3, -1, -5, 6\} \text{ ها عبارتند از}$$

### ۳. دست آوردهای پژوهش

در این مقاله به ارایه الگوریتم اولیه-دوگان برای حل مسایل تک هدفه جریان شبکه پرداختیم. از مزایای این روش نسبت به الگوریتم سیمپلکس شبکه سرعت آن در رسیدن به جواب است. با ارایه مثالی کارایی روش را مورد بررسی قرار دادیم.

### مراجع

1. Ehrgott M. Primal-Dual simplex method for multiobjective linear programming , Theory Appl 134J Optim Theory Appl 134 (2007) 483–497.
2. A. Eusebio, J. R. Figueira, M. Ehrgott, A primal–Dual simplex algorithm for bi-objective network flow problems, 4OR-Q J. Oper. Res. (2009) 255–273
3. , M. Ehrgott, L. Shao, A. Schobel, An approximation algorithm for convex multi-objective programming problems, J. Glob. Optim. 50 (2011) 397–416.

## بررسی مدل بیماری‌های عفونی با استفاده از کنترل بهینه

اسدالله محمود زاده وزیری، آرمان فرح‌بخش\*، و ابوالفضل عبدالله زاده

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

*amwaziri@birjand.ac.ir*

*a.farahbakhsh@birjand.ac.ir*

*a.abdolahzadeh@birjand.ac.ir*

چکیده. در این مقاله به بررسی مدل بیماری‌های عفونی سل، ابولا و حمله پاتوژن به یک ارگان بدن می‌پردازیم. جواب مسائل کنترل بهینه بر اساس اصل حداقل‌یابی پونتریاگین بدست می‌آید. نتایج عددی صحت روش را تایید می‌کند.

### ۱. مقدمه

در این مقاله ابتدا به بررسی مدل اصلاح شده‌ی SEIR، یعنی SEIL، که یک مدل چهاربعده‌ی، برای بیماری سل است، می‌پردازیم که در آن  $S$  تعداد افراد سالم مستعد بیماری،  $E$  تعداد افراد عفونی پنهان با خطر بالا،  $I$  تعداد افراد عفونی آشکار دارای سل پیشرفته و  $L$  تعداد افراد عفونی پنهان با خطر کم-بهبود یافته، متغیرهای حالت مدل می‌باشند [۱]. مدل بعدی، مدل بیماری ابولا می‌باشد که یک بیماری کشنده است که در آن  $S$  تعداد افراد مستعد،  $E$  در معرض بیماری،  $I_1$  دارای عفونت مرحله اول،  $I_2$  دارای عفونت مرحله آخر یا پیشرفته،  $R$  بهبود یافته و  $F$  فوت شده و آماده برای انتقال به مراسم خاکسپاری، متغیرهای حالت مدل می‌باشند [۲]. در انتها یک مدل ساده برای حمله پاتوژن به یک ارگان بدن و دفاع ایمنولوژیکی را ارائه می‌دهیم [۳]. در این مدل متغیرهای حالت  $x_i$ ،  $i = 1, 2, 3$  به ترتیب نشان دهنده‌ی غلظت پاتوژن، سلول‌های

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. کنترل بهینه، مدل بیماری، اصل حداقل‌یابی پونتریاگین .  
\* سخنران

پلازما (حامل و تولید کننده آنتی بادی)، آنتی بادی (که پاتوژن را می کشد) و  $x_4$  مشخصه نسبی ارگان آسیب دیده (ارگان سالم را صفر و مرده را یک قرار می دهیم) می باشند.

## ۲. معرفی مدل های مورد بررسی

۱.۲. مدل بیماری سل. فرض کنید  $N$ ، نشان دهنده جمعیت،  $b(t)$  نرخ تولد،  $\mu(t)$  نرخ مرگ و میر،  $\beta$  نرخ انتقال بیماری،  $k(t)$  نرخ پیشرفت بیماری از مرحله عفونی پنهان به عفونی آشکار،  $r(t)$  نرخ انتقال حالت عفونی پنهان با خطر بالا به حالت عفونی پنهان با خطر کم،  $\alpha$  تعداد افرادی که در حالت عفونت پنهان مانده و بیماری آن ها به حالت عفونت آشکار پیشرفت نکرده است و  $p(t)$  نرخ درمان های موفق و در نتیجه  $1 - p(t)$  نرخ درمان های ناموفق، باشند. بنابراین مدل بیماری با اعمال کنترل های  $u_1(t)$  تابع کنترل مسافت،  $u_2(t)$  تابع کنترل پیداکردن نمونه و  $u_3(t) - 1$  تابع کنترل موجودی نمونه، به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bN - \mu S - (1 - u_1(t))\beta \frac{S}{N}I, \\ \frac{dE}{dt} &= (1 - u_1(t))\beta \frac{S}{N}I - (k(t) + u_2(t)\alpha + \mu)E + (1 - u_3(t))prI, \\ \frac{dI}{dt} &= k(t)E - (r + \mu)I, \\ \frac{dL}{dt} &= (1 - (1 - u_3(t))p)rI + u_2(t)\alpha E - \mu L. \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

ضریب  $1 - u_1(t)$ ، تلاش برای کاهش افراد مستعد که توسط افراد عفونی آلوده شده اند، مانند جداسازی از افراد عفونی یا برنامه های آموزشی (مبارزه برای کنترل سلامت)، را بیان می کند. همچنین  $u_2(t)$  بیان کننده تلاش برای کاهش تعداد افرادی که ممکن است آلوده شوند، و  $1 - u_3(t)$ ، تلاش برای کاهش افراد برگشت کننده به بیماری، مانند مراقبت از بیمار تا زمانی که درمان کامل شود، را بیان می کند. سه کنترل معرفی شده در بالا بین  $0.05$  و  $0.95$  قرار دارند [۱].

۲.۲. مدل بیماری ابولا. مدل بیماری ابولا، شامل سه کنترل،  $u_1(t)$ ، کنترل پیدا کردن نمونه که در واقع فاصله بین افراد مستعد و عفونی را حفظ می کند،  $u_2(t)$ ، کنترل پیدا کردن نمونه، تلاش برای کاهش تعداد افرادی که ممکن است آلوده شوند و  $u_3(t)$ ، کنترل موجودی نمونه، تلاش می کند افرادی که در مرحله اول و هم آخر عفونت قرار دارند، درمان شوند و تحت نظارت قرار گیرند، به منظور کاهش افرادی که بیماری آن ها توسعه یافته یا به سمت مرگ هستند، می باشد. در نتیجه مدل ابولا به صورت

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - (1 - u_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F)S - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= (1 - u_1)(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_F F)S - (\alpha u_2 + \mu)E, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \alpha u_2 E - (u_3 \delta_1 \gamma_1 + \mu)I_1, \end{aligned}$$

بررسی مدل بیماری‌های عفونی با کنترل بهینه

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} &= u_3\delta_1\gamma_1I_1 - (u_3\delta_2\gamma_2 + \mu)I_2, \\ \frac{dF}{dt} &= u_3\delta_2\gamma_2I_2 - \gamma_FF, \\ \frac{dR}{dt} &= u_3(1 - \delta_1)\gamma_1I_1 + u_3(1 - \delta_2)\gamma_2I_2 - (\mu + \gamma_R)R, \quad (2.2)\end{aligned}$$

بیان می‌شود که در آن  $\beta_1, \beta_2$  و  $\beta_F$  به ترتیب نشان دهنده‌ی نرخ افراد مستعد که توسط افراد دارای عفونت مرحله اول، مرحله آخر و فوت شده، آلوده شده‌اند، می‌باشند. افراد در معرض با نرخ  $\alpha$  به سمت کلاس افراد عفونی مرحله اول حرکت می‌کنند. متوسط طول بیماری در مرحله اول با  $\gamma_1^{-1}$  و در مرحله آخر با  $\gamma_2^{-1}$ ، متوسط زمان مرگ تا خاکسپاری با  $\gamma_F^{-1}$  و متوسط دوره درمان ابولا با  $\gamma_R^{-1}$ ، نشان داده شده است. همچنین، کسری از افراد آلوده که به مرحله آخر عفونت و کسری از افرادی که به سمت مرگ پیش رفته باشند را به ترتیب با  $\delta_1$  و  $\delta_2$  نشان می‌دهیم. در انتها  $\mu$  نیز نشان دهنده‌ی سرانه طبیعی مرگ و میر ناشی از بیماری ابولا می‌باشد.

۳.۲. مدل حمله پاتوژن به یک ارگان بدن. در این مدل، اهداف درمان به ترتیب، کشتن پاتوژن، خنثی‌سازی اثرات مضر آن، افزایش اثر بخشی پاسخ ایمنی و فراهم کردن مراقبت درمان به ارگان آسیب دیده، می‌باشند. بنابراین متغیرهای کنترل را به صورت،  $u_1$  کشنده پاتوژن،  $u_2$  تقویت سلول‌های پلازما،  $u_3$  تقویت آنتی‌بادی و  $u_4$  عامل بهبود یافتن ارگان، در نظر می‌گیریم. حالت پایدار غلظت سلول‌های پلازما را با  $x_2^*(t)$  نشان می‌دهیم. تمام ضرایب  $a_{ij}$  و  $b_i$  بجز  $a_{21}(x_4)$ ، ثابت‌های نامنفی هستند. ضریب  $a_{21}(x_4)$  نقص ایمنی که باعث آسیب به ارگان می‌شود را توصیف می‌کند و به صورت

$$a_{21}(x_4) = \begin{cases} \cos(\pi x_4) & 0 \leq x_4 \leq 0.5, \\ 0 & x_4 \geq 0.5, \end{cases}$$

که نشان می‌دهد توانایی تولید سلول‌های پلازما با افزایش آسیب به یک ارگان بدن، کاهش می‌یابد و زمانیکه سلامت ارگان به یک نقطه خاص رسد (در اینجا  $0.5$ °)، تولید سلول‌های پلازما کاملاً متوقف می‌شود. بنابراین مدل را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (a_{11} - a_{12}x_3)x_1 - b_1u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(x_4)a_{22}x_1x_3 - a_{23}(x_2 - x_2^*) + b_2u_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_2 - (a_{32} + a_{33}x_1)x_3 + b_3u_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_1 - a_{42}x_4 - b_4u_4.\end{aligned}$$

### ۳. کنترل بهینه

در حالت کلی می‌توان معادلات معرفی شده را به فرم برداری زیر نمایش داد

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X(t), U(t)), \quad (1.3)$$

که  $X(t)$  و  $U(t)$  بردارهای حالت و کنترل می باشند. پرتکل بهینه درمان با مینیم کردن تابع هزینه درمان،  $J$ ، برای بیماری سل، ابولا و حمله پاتوژن، به ترتیب به صورت

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ E(t) + I(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) \right] dt,$$

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ I_1(t) + I_2(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) + \frac{A_3}{2} u_3^2(t) \right] dt,$$

$$J(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} (p_1 x_1^2(t_f) + p_4 x_4^2(t_f)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_1 x_1^2(t) + q_4 x_4^2(t) + r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t) + r_3 u_3^2(t) + r_4 u_4^2(t)] dt,$$

می باشند. هدف، پیدا کردن کنترل بهینه  $U^*$  و متغیرهای حالت  $X^*$  می باشد بطوریکه تابع هدف  $J(U(t))$  روی  $\Omega = \{U(t) \in L^1([t_0, t_f]) | u_{min} \leq U \leq u_{max}\}$  مینیمم شود. یعنی

$$J(U^*(t)) = \min_{\Omega} J(U(t)).$$

برای حل سیستم بهینه، اصل حداقل یابی پونتریاگین را بکار می بریم. اصل پونتریاگین شرط لازم کنترل بهینه را برآورده می کند. این اصل دستگاه (۱۰۳) را به یک مساله مینیم سازی تابع هامیلتون،  $H$ ، نسبت به  $U$  با متغیرهای الحاقی  $\lambda_i$ ،  $n$ ،  $i = 1, \dots, n$  تبدیل می کند.

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n, u) = f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i,$$

که در سیستم الحاقی  $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{d\lambda_i}{dt}$  با شرایط اریبی  $\lambda_i(t_f) = c_i$ ،  $i = 1, \dots, n$  صدق می کنند که سیستم را به صورت پسرول حل می کنیم. در ادامه سیستم  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  را تشکیل می دهیم که به معادلات بهینگی معروف است. با استفاده از معادلات بهینگی مقداری برای  $u$  بدست می آوریم. بنابراین مقدار کنترل بهینه به صورت  $u^* = \min(u_u, \max(u_l, u))$  بدست می آید.

### مراجع

- [1] S. Whang, S. Choi and E. Jung, *A dynamic model for tuberculosis transmission and optimal treatment strategies in South Korea*, Journal of Theoretical Biology, 279 (2011), 120–131.
- [2] CM. Rivers, ET. Lofgren, M. Marathe, S. Eubank and BL. Lewis, *Modeling the impact of interventions on an epidemic of Ebola in Sierra Leone and Liberia*, PLOS Curr. (2014).
- [3] R.F. Stengel, R. Ghigliazza, N. Kulkarni and O. Laplace, *Optimal control of innate immune response*, Optim. Control Appl. Methods, 23 (2002), 91–104.

## حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی برداری با استفاده از شبکه عصبی

طیبه اسراری درح\* و سهراب عفتی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

taibeh.asrari@gmail.com

s-effati@um.ac.ir

چکیده. هنگامی که یک مسئله بهینه‌یابی شامل بیش از یک تابع هدف باشد، مسئله به یک مسئله بهینه‌سازی برداری تبدیل می‌شود. برای مقایسه این بردارها و انتخاب بردار بهینه یک ترتیب جزئی در نظر گرفته می‌شود. این ترتیب جزئی معمولاً توسط یک مخروط محدب و گوشه‌دار ارائه می‌گردد. در این مقاله ابتدا به معرفی یک رده از توابع زیرخطی به طور یکنوا صعودی با استفاده از عناصر مخروط دوگان افزایشنده در فضای باناخ انعکاسی می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم هر عضو مینیمال مناسب از یک مجموعه دلخواه در این فضا، بوسیله مینیمم کردن توابعی خاص از این رده، روی مجموعه مذکور بدست می‌آید. سپس روش اسکالرسازی مخروطی را برای مسائل بهینه‌سازی برداری در فضای نرم‌دار  $\mathbb{R}^n$  با ترتیب جزئی ناشی از مخروط  $\mathbb{R}_+^n$  بکار می‌بریم و مسائل بهینه‌سازی اسکالر مربوط به مسائل خاصی از بهینه‌سازی برداری را با استفاده از شبکه عصبی حل می‌کنیم.

### ۱. مقدمه

به‌طور کلی اسکالرسازی به معنای جایگزین کردن یک مسئله بهینه‌سازی برداری با یک مسئله بهینه‌سازی اسکالر است. نظریه اسکالرسازی به‌طور گسترده‌ای توسعه یافته است و این نشان‌دهنده اهمیت این روش برای حل مسائل بهینه‌سازی برداری است. در این مقاله، یکی از روش‌های اسکالرسازی را معرفی می‌کنیم.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. بهینه‌سازی برداری، اسکالرسازی، نقاط مینیمال، شبکه عصبی.  
\* سخنران

تعریف ۱.۱. فرض می‌کنیم  $(Y, \|\cdot\|)$  یک فضای نرم‌دار حقیقی با ترتیب جزئی که توسط مخروط گوشه‌دار  $C$  ناشی می‌شود، است. مخروط دوگان  $C^*$  و شبه داخلی  $C^\#$  از  $C$  به ترتیب بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$C^* = \{y^* \in Y^* : y^*(y) \geq 0, \text{ for all } y \in C\}$$

$$C^\# = \{y^* \in Y^* : y^*(y) \geq 0, \text{ for all } y \in C \setminus \{0\}\}$$

تعریف ۲.۱. دو مخروط زیر را به عنوان مخروط‌های دوگان افزایشنده معرفی می‌کنیم.

$$C^{a*} = \{(y^*, \alpha) \in C^* \times \mathbb{R}_+ : y^*(y) - \alpha\|y\| \geq 0 \text{ for all } y \in C\}$$

$$C^{a\#} = \{(y^*, \alpha) \in C^\# \times \mathbb{R}_+ : y^*(y) - \alpha\|y\| > 0 \text{ for all } y \in C \setminus \{0\}\}$$

تعریف ۳.۱. فرض کنیم  $C$  یک مخروط محدب در فضای نرم‌دار حقیقی  $(Y, \|\cdot\|)$  باشد و تابع  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  روی  $Y$  داده شده باشد تابع  $g$  روی  $Y$  به‌طور یکنوا صعودی است، اگر برای هر  $y_1, y_2 \in Y$  که  $y_1 - y_2 \in C$  آنگاه  $g(y_1) \geq g(y_2)$ .

قضیه ۴.۱. فرض کنیم  $(Y, \|\cdot\|)$  فضای نرم‌دار حقیقی با ترتیب جزئی که توسط مخروط محدب گوشه‌دار  $C$  ناشی می‌شود باشد. فرض کنیم  $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$  و  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  و تابع  $g_{(y^*, \alpha)} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $g_{(y^*, \alpha)}(y) = y^*(y) + \alpha\|y\|$  تعریف شده باشد. پس تابع  $g_{(y^*, \alpha)}$  روی  $Y$  به‌طور یکنوا صعودی است اگر و فقط اگر  $(y^*, \alpha) \in C^{a*}$ .

□

برهان. به [۳] مراجعه شود.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم  $(Y, \|\cdot\|)$  فضای نرم‌دار حقیقی با ترتیب جزئی که توسط مخروط محدب  $C \subset Y$  ناشی می‌شود و  $A$  مجموعه ناتهی از  $Y$  باشد.

الف) عضو  $\bar{y} \in A$  عضو مینیمال مجموعه  $A$  است اگر  $\{\bar{y}\} - C \cap A = \{\bar{y}\}$   
 ب) عضو  $\bar{y} \in A$  عضو مینیمال مناسب مجموعه  $A$  به مفهوم بنسون است اگر  $\bar{y}$  عضو مینیمال  $A$  و عضو صفر  $Y$  عضو مینیمال  $(\text{cl}(\text{cone}(A + C - \{\bar{y}\})))$  باشد.

قضیه ۶.۱. فرض کنیم  $(Y, \|\cdot\|)$  فضای نرم‌دار حقیقی با ترتیب جزئی که توسط مخروط گوشه‌دار محدب بسته  $C \subset Y$  ناشی می‌شود، باشد و  $(y^*, \alpha) \in Y^* \times \mathbb{R}_+$  و  $\text{sol}(\text{sp})$  مجموعه جواب‌های بهینه مسئله بهینه‌سازی اسکالر  $(\text{sp})$  است.

$$\text{sp} : \min_{y \in A} \{y^*(y) + \alpha\|y\|\}$$

فرض می‌کنیم برای  $(y^*, \alpha) \in C^{a*}$ ،  $\text{sol}(\text{sp}) \neq \emptyset$  است. اگر  $(y^*, \alpha) \in C^{a\#}$  آنگاه هر عضو مجموعه  $\text{sol}(\text{sp})$  یک عضو مینیمال مناسب به مفهوم بنسون است.

□

برهان. به [۳] مراجعه شود.

نتیجه ۷.۱. اگر  $Y = \mathbb{R}^n$  و  $C = \mathbb{R}_+^n$  و  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$  آنگاه

$$C_1^{a\#} = \{((w_1, \dots, w_n), \alpha) : 0 \leq \alpha < w_i, i = 1, \dots, n\}$$

□

برهان. به [۲] مراجعه شود.

حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی برداری با استفاده از شبکه عصبی

**قضیه ۸.۱.** فرض کنیم  $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$ ،  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$  و  $r \in \mathbb{R}^n$  برداری دلخواه باشد اگر  $(w, \alpha) \in \mathbb{C}_1^{\#}$  باشد آن‌گاه  $\bar{y}$  عضو مینیمال مناسب  $\mathbb{A}$  است اگر و فقط اگر  $\bar{y}$  جواب بهینه (sp1) باشد.

$$\text{sp1} : \min_{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}} \{w_1(y_1 - r_1) + \dots + w_n(y_n - r_n) + \alpha[|y_1 - r_1| + \dots + |y_n - r_n|]\}$$

□

برهان. به [۲] مراجعه شود.

نتایج به دست آمده در قسمت‌های قبلی، برای روش اسکالرزسازی که آن را مخروطی می‌نامیم استفاده می‌شود [۲].

فرض می‌کنیم مسئله بهینه‌سازی برداری (چندهدفه) به صورت

$$\min_{x \in X} [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T \quad (1.1)$$

باشد. در نتیجه مسئله اسکالرز برای پارامترهای داده شده  $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{\#}$  و  $r = (r_1, \dots, r_m)$  با توجه به مسئله (sp1) عبارت است:

$$\text{sp2} : \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n w_i (f_i(x) - r_i) + \alpha \sum_{i=1}^n |f_i(x) - r_i|$$

## ۲. دست‌آوردهای پژوهشی

در مسئله بهینه‌سازی برداری (۱.۱)،  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  و  $X$  یک مجموعه محدب است و توابع  $f_i$ ،  $i = 1, \dots, m$  محدب فرض شده‌اند. در این قسمت حالت‌های مختلفی را برای تابع  $f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) در نظر می‌گیریم و با توجه به مسأله (sp2) مسأله اسکالرز مخروطی مربوطه را می‌نویسیم. حالت اول:

$$\min [c_1^T x, \dots, c_m^T x]^T$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b, \quad x \geq \mathbf{0} \quad (1.2)$$

که در آن  $c_i^T \in \mathbb{R}^n$ ،  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  و  $b \in \mathbb{R}^m$ . مسئله اسکالرز مخروطی مربوط به مسئله (۱.۲)، با توجه به مسئله (sp2)، عبارت است از

$$\min c^T u$$

$$\text{s.t. } A_1 u \leq b_1, \quad A_2 u = b_2, \quad u \geq \mathbf{0} \quad (2.2)$$

که در آن  $c \in \mathbb{R}^{n+2m}$  و  $u \in \mathbb{R}^{n+2m}$  همچنین

$$A_1 = (A, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} c_1^T & -e_1 & e_1 \\ \vdots & & \\ c_m^T & -e_m & e_m \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix},$$

و  $e_i$  بردار  $m$  تایی است که مؤلفه  $i$ ام آن یک و بقیه صفر هستند.

مسئله (۲.۲) قابل تبدیل به مسئله مکمل خطی مخلوط است و با استفاده از شبکه عصبی مسائل مکمل خطی مخلوط (MLCP) قابل حل است [۱].



حالت دوم:

$$\begin{aligned} \min & [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T \\ \text{s.t.} & g(x) \leq 0, h(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

که در آن برای هر  $f_i, i = 1, \dots, n$  از پایین کران دار هستند و توابع  $g(x)$  و  $h(x)$  در شرایط مسئله برنامه ریزی غیرخطی محدب صدق می کنند. اگر نقطه مرجع  $r = (r_1, \dots, r_m)$  طوری انتخاب شود که برای هر  $i (i = 1, \dots, m)$ ،  $r_i$  کوچکتر از کران پایین  $f_i$  باشد آن گاه مسئله (3.2) قابل تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی محدب است و با استفاده از شبکه عصبی مسائل مکمل غیرخطی مخلوط (MNCP) قابل حل است [1].

مثال 1.2. مسئله بهینه سازی برداری با مؤلفه های تابع خطی زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} \min & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} & : x_1 - x_2 \leq 3, -3x_1 - x_2 \leq -6, \quad x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

مسئله اسکالر مخروطی مسئله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & w_1x_1 + w_2x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 + \alpha x_5 + \alpha x_6 \\ \text{s.t.} & : x_1 - x_2 \leq 3, -3x_1 - x_2 \leq -6, \\ & x_1 - r = x_3 - x_4, x_2 - r = x_5 - x_6, \quad x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

نتایج به دست آمده از حل مسئله اسکالر با استفاده از شبکه عصبی مربوط به مسائل MLCP برای مجموعه مختلف از پارامترهای برتری  $w$  و  $r$  و پارامتر افزایشنده  $\alpha$  در جدول 1 آمده است.

جدول 1: جواب های کارایی به دست آمده با استفاده از روش اسکالری سازی مخروطی

سطر	$(w_1, w_2)$	$\alpha$	$(r_1, r_2)$	$(x_1, x_2)$
1	(6, 6)	5	(2, 2)	(1, 3)
2	(3, 3)	2	(2, 0)	(2, 0)
3	(5, 3)	2	(1, 7)	(1, 3)

نتیجه گیری: در این مقاله، به این نتیجه رسیدیم که می توان مسائل بهینه سازی برداری را به روش اسکالری سازی مخروطی به یک مسئله تک هدفه تبدیل کرد و حالت های خاصی از مسئله اسکالر به دست آمده را با کمک شبکه عصبی حل کرد.

### مراجع

- ع. قماش لنگرودی، حل مسائل بهینه سازی با استفاده از شبکه های عصبی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علوم پایه، دانشگاه تربیت معلم سبزوار، آبان 1383.
- R. Kasimbeyli, *A conic scalarization method in multi-objective optimization*, J.Global optim. 56 (2013), no. 2, 279-297.
- R. Kasimbeyli, *A nonlinear cone separation theorem and scalarization in non-convex vector optimization*, SIAM J.optim. 20 (2009), no. 3, 1591-1619.

## یک الگوریتم تصادفی جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید

سحر محمدخان سرتیپ<sup>۱\*</sup>، عقیله حیدری<sup>۱</sup>، و سعید نژادحسین<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور مشهد  
saharsartip@gmail.com

a\_heidari@pnu.ac.ir

<sup>۲</sup>گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور گناباد  
s\_nejhadhosein@pnu.ac.ir

چکیده. در این مقاله یک الگوریتم تصادفی ترکیبی برای حل مسأله بهینه‌سازی نامقید ارائه شده است که در آن یک الگوریتم گرادیان محور به صورت تصادفی به کار رفته است. الگوریتم پیشنهادی از تعمیم روش‌های گرادیان مبنا، شامل تندترین شیب ( $SD$ ) و فلاچر-ریوز ( $FR$ ) بر اساس مفهوم  $q$ -گرادیان استفاده می‌کند. برای تضمین همگرایی سراسری و عدم وابستگی به پارامتر  $q$  در روش‌های  $qSD$  و  $qFR$  از یک اغتشاش گاوسی در الگوریتم استفاده کرده‌ایم. بنابراین در هر مرحله پارامتر  $q$  به صورت تصادفی مشخص می‌گردد. علاوه بر این نقطه شروع الگوریتم‌های  $SD$  و  $FR$  نیز به تناوب با یک اغتشاش به صورت تصادفی تغییر می‌یابد. الگوریتم تصادفی پیشنهادی با روش‌های  $qSD$  و  $qFR$  مقایسه و نتایج تحلیل شده است.

### ۱. مقدمه

با توجه به اهمیت مسائل بهینه‌سازی در انواع مسائل کاربردی و واقعی، توسعه روش‌های حل این گونه مسائل بسیار مهم می‌باشد. الگوریتم‌های متفاوتی برای حل این دسته از مسائل ارائه شده است که هر یک دارای مزایا و معایب خاصی می‌باشد. به عنوان مثال روش‌های تندترین شیب و فلاچر-ریوز (که حالت خاصی از گرادیان مزدوج است)، روش‌های گرادیان محور و موضعی هستند که برای مسائل چندمدی کارایی ندارند. برای تبدیل این روش‌ها به روش‌های سراسری، می‌توان به جای گرادیان معمولی از مفهوم  $q$ -گرادیان [۱] استفاده کرد.  $q$ -گرادیان بر

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. بهینه‌سازی سراسری، تندترین شیب، فلاچر-ریوز،  $q$ -گرادیان، اغتشاش تصادفی.  
\* سخنران

پایه مفهوم  $q$ -مشتق بنا شده است. فرانک هیلتون جکسون<sup>۱</sup> [۲] برای اولین بار در اوایل قرن نوزدهم مفهوم  $q$ -مشتق را معرفی کرد. ساترونی<sup>۲</sup> و همکارانش [۳] از  $q$ -مشتق برای توسعه بردار  $q$ -گرادیان استفاده کرده‌اند. در این مقاله قصد داریم الگوریتم‌های  $FR$  و  $SD$  را با استفاده از مفهوم  $q$ -گرادیان و یک اغتشاش تصادفی به الگوریتم‌های ترکیبی  $q_sFR$  و  $q_sSD$  تبدیل کنیم و سپس آنها را با الگوریتم‌های  $qFR$  و  $qSD$  که تعمیم یافته الگوریتم‌های  $FR$  و  $SD$  توسط مفهوم  $q$ -گرادیان هستند، مقایسه کنیم.

## ۲. الگوریتم‌های ترکیبی $q_sFR$ و $q_sSD$

در این قسمت الگوریتم‌های  $qFR$  و  $qSD$  را با یک الگوریتم تصادفی ترکیب می‌کنیم که در آن از یک اغتشاش گاوسی برای جستجوی ناحیه جواب استفاده می‌شود. در الگوریتم پیشنهادی فرآیند جستجو به تدریج از جستجوی سراسری در ابتدای الگوریتم به جستجوی موضعی در انتهای الگوریتم منتقل می‌شود. برای بیان الگوریتم پارامترها و نمادهای زیر را در نظر می‌گیریم.  $f: D \rightarrow R$  تابع هدف است که در آن  $D = [l, u] \subseteq R^n$  می‌باشد.  $x^{(0)} \in D$  نقطه شروع و  $\sigma^{(0)} > 0$  انحراف معیار اولیه توزیع گاوسی برای تولید پارامتر  $q$  و  $\alpha^{(0)} > 0$  طول گام اولیه و  $0 < \beta < 1$  ضریب کاهش طول گام و انحراف معیار توزیع نرمال برای تولید پارامتر  $q$  و  $\theta^{(0)}, \theta_{min} > 0$  انحراف معیار اولیه و مینیمم اغتشاشات گاوسی و  $m > 1$  فاصله بین تکرارهای گاوسی و  $r > 0$  تعداد اغتشاشات گاوسی در هر تکرار گاوسی (مقدار پیش فرض  $r = n + 1$ ) و  $0 < \eta \leq 1$  ضریب کاهش انحراف معیار اغتشاشات گاوسی (مقدار پیش فرض  $\eta = \frac{1}{2}$ ) و  $\epsilon > 0$  پارامتر دقت شرط توقف می‌باشد. همچنین  $\rho_D: R^n \rightarrow D$  که در آن برای همه  $x \in D$  داریم:  $\rho_D(x) = x$  اگر نقطه  $x$  خارج از بازه قرار بگیرد، آن را به کوچکترین کران بالا یا پایین منتقل می‌کند.

### الگوریتم پیشنهادی.

**گام ۱: ورودی:** مقادیر انحراف معیار اولیه  $\sigma^{(0)}$  و طول گام اولیه  $\alpha^{(0)}$  و پارامتر کاهش  $\beta$  و انحراف معیار اولیه اغتشاش  $\theta^{(0)}$  و انحراف معیار مینیمم اغتشاش  $\theta_{min}$  و  $m$  فاصله بین تکرارهای گاوسی و  $x^{(0)}$  را وارد کن و قرار کن  $k = 0$  و  $x_{best} = x^{(0)}$ .

**گام ۲:** اگر  $k \neq 0$  بر  $m$  بخش‌پذیر باشد، به مرحله ۸ برو (تکرار گاوسی). در غیر این صورت بردار  $q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_2^{(k)})$  را به صورت زیر محاسبه کن:

۲-۱: اگر  $x_i^{(k)} \neq 0$ ،  $q_i^{(k)}$  را از توزیع نرمال با میانگین ۱ و انحراف معیار  $\frac{\sigma^{(k)}}{|x_i^{(k)}|}$  محاسبه

کن. در غیر این صورت قرار بده  $q_i^{(k)} = 1$ .

۲-۲: قرار بده:  $q_i^{(k)} x_i^{(k)} = \rho_D(q_i^{(k)} x_i^{(k)})$

گام ۳: برای  $i = 1, 2, \dots, n$  کارهای زیر را انجام بده:

<sup>۱</sup>Jackson F. H.

<sup>۲</sup>Soterroni

یک الگوریتم تصادفی جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید

۳-۱: قرار بده:

$$y^{(k,I)} = \begin{cases} x^{(k)} + (q_i^{(k)} - 1)x_i^{(k)} e^i & q_i^{(k)} \neq 0 \\ y^{(k,I)} = x^{(k)} + \epsilon e^i & O.W \end{cases}$$

۲-۳: قرار بده:  $xbest = argmin(xbest, y^{(k,i)}) \quad i = 1, 2, \dots, n$

گام ۴: برای روش  $q_sSD$  قرار بده  $d^{(k)} = -\nabla_q f(x^{(k)})$

برای روش  $q_sFR$  قرار بده  $d^{(k)} = -\nabla_q f(x^{(k)} + \delta^{(k)}d^{(k-1)})$  که در آن:

$$\delta^{(k)} = \begin{cases} \frac{\nabla_q f(x^{(k)})^T \nabla_q f(x^{(k)})}{\nabla_q f(x^{(k-1)})^T \nabla_q f(x^{(k-1)})} & k > 0 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

گام ۵: قرار بده:  $x^{(k+1)} = \rho_D(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})$

گام ۶: قرار بده:  $x^{(k+1)} = argmin(xbest, x^{(k+1)})$

گام ۷:  $\alpha^{(k+1)} = \beta \alpha^{(k)}$  و  $\sigma^{(k+1)} = \beta \sigma^{(k)}$  و به گام (۱۰) برو.

گام ۸: (تکرار گاوسی) برای  $i = 1, 2, \dots, r$

۸-۱: توزیع نرمال  $z^{(k,i)}$  را با میانگین 0 و انحراف معیار  $(\theta^{(k)})^2 I_n$  محاسبه کن.

۸-۲: قرار بده:  $y^{(k,i)} = \rho_D(x^{(k)} + z^{(k,i)})$

۸-۳:  $xbest = argmin(xbest, y^{(k,i)})$

گام ۹: قرار بده  $\hat{i} = argmin_{1 \leq i \leq r} f(y^{(k,i)})$  اگر  $f(y^{(k,\hat{i})}) < f(x^{(k)})$  قرار بده:

$$x^{k+1} = y^{(k,\hat{i})}, \theta^{(k+m)} = \theta^{(k)}$$

در غیر این صورت:  $x^{(k+1)} = x^{(k)}, \theta^{(k+m)} = max(\eta\theta^{(k)}, \theta_{min})$

گام ۱۰: اگر شرط توقف برقرار است جواب جاری،  $xbest$ ، بهینه است. در غیر این صورت

قرار بده  $k = k + 1$  و به گام (۲) برو.

تحلیل نتایج عددی

برای تحلیل عددی روش‌های پیشنهادی  $q_sSD$  و  $q_sFR$  در این قسمت دو مسأله آزمون را با مشخصات جدول ۱ در نظر می‌گیریم.

جدول ۱: مسائل آزمون

مسأله نام	ضابطه تابع	$D = [u - l]$	$x^{(0)}$	$x^*$	$f(x^*)$
$F_1$	$100(x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$	$[2/5, 2/5]$	$[1/5, 1/5]$	$[1, 1]$	0
$F_2$	$2 - (e^{-x^2} + 2e^{-(x-3)^2})$	$[-1, 4]$	0.5	3	0.0001

جدول ۳ نتایج عددی حل مسائل آزمون با روش‌های  $q_sSD$  و  $q_sFR$  و  $qSD$  و  $qFR$

مشخص می‌کند. چون الگوریتم تصادفی است، هر مسأله آزمون را با هر الگوریتم ۱۰ بار اجرا کردیم. در جدول ۳ بهترین مقدار تابع هدف ( $y_b$ ) و بدترین مقدار ( $y_w$ ) و میانگین این مقادیر ( $\bar{y}$ ) و میانگین ( $M$ ) و خطای استاندارد ( $SE$ ) را در ده بار اجرای الگوریتم نمایش دادیم. پارامترهای ورودی الگوریتم‌های  $q_sSD$  و  $q_sFR$  در جدول ۲ مشخص شده‌اند. با توجه به نتایج عددی

جدول ۲: مقادیر پارامترهای ورودی الگوریتم‌های  $q_sFR$  و  $q_sSD$

پارامتر	$L$	$\alpha^{(0)}$	$\beta$	$\theta^{(0)}$	$\sigma^{(0)}$	$m$	$\theta_{min}$	$\xi$
مقادیر	$\ u - l\ $	$0.1 \times L$	0.999	$0.2 \times L$	$0.2 \times L$	10	0.1	0.2

جدول ۳: نتایج عددی الگوریتم‌های  $q_sFR$  و  $q_sSD$  و  $qFR$  و  $qSD$

تابع		$qSD$	$qFR$	$q_sSD$	$q_sFR$
$F_3$	$y_b$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$7.6 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-3}$
	$y_w$	$2 \times 10^{-1}$	$3 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-1}$	$8.4 \times 10^{-2}$
	$\bar{y}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$	$4.2 \times 10^{-2}$	$4.06 \times 10^{-1}$
	$M$	$9.5 \times 10^{-4}$	$2.1 \times 10^{-3}$	$8.7 \times 10^{-3}$	$3.9 \times 10^{-2}$
	$SE$	$5.6 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-2}$	$9.5 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-2}$
$F_4$	$y_b$	$9.9 \times 10^{-1}$	$9.9 \times 10^{-1}$	$-1.12 \times 10^{-4}$	$10^{-4}$
	$y_w$	$9.9 \times 10^{-1}$	$9.9 \times 10^{-1}$	$1.0003 \times 10^0$	$9.9 \times 10^{-1}$
	$\bar{y}$	$9.9 \times 10^{-1}$	$9.9 \times 10^{-1}$	$7.3 \times 10^{-1}$	$1.2 \times 10^{-1}$
	$M$	$9.9 \times 10^{-1}$	$9.9 \times 10^{-1}$	$1.0008 \times 10^0$	$6.7 \times 10^{-4}$
	$SE$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$4.1 \times 10^{-1}$	$2.9 \times 10^{-1}$

جدول ۳، برای مسأله  $F_1$  روش‌های  $qFR$  و  $qSD$  بهتر از دو روش دیگر بوده است و بهترین میانگین مربوط به روش  $qFR$  می‌باشد. کمترین خطا نیز مربوط به روش  $qFR$  است. برای مسأله  $F_2$ ، که دارای دو مینیمم می‌باشد ( $x^* = 0$  مینیمم موضعی و  $x^* = 2.99$  مینیمم سراسری)، با شروع از نقطه  $x^{(0)} = 0.5$ ، روش‌های  $qFR$  و  $qSD$  به مینیمم موضعی رسیده‌اند اما برای همین نقطه شروع، روش‌های  $q_sFR$  و  $q_sSD$  به مینیمم سراسری دست یافته‌اند. از بین این چهار روش، بهترین میانگین مربوط به روش  $q_sFR$  است و کمترین خطا مربوط به روش  $qFR$  و  $qSD$  می‌باشد.

#### نتیجه‌گیری:

نتایج عددی مقایسه الگوریتم‌های پیشنهادی با روش‌های  $qFR$  و  $qSD$  نشان داد که در مسائل چندمدی استفاده از الگوریتم پیشنهادی باعث افزایش دامنه جهت‌های جستجو و همچنین تضمین همگرایی سراسری خواهد شد.

#### مراجع

1. Erica J. C. Gouvea , Rommet G. Regis , Aline C. Soterroni , Marluce C. Scarbello and Fernando M. Ramos . Global optimization using q-gradients . European Journal of Operational Research 251 (2016) 727-738.
2. Jackson, F. H. (1909). On q-functions and a certain difference operator. Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 46(2), 253– 281.
3. Soterroni, A. C., Galski, R. L., & Ramos, F. M. (2013a). The q-gradient method for global optimization. arXiv: 1209.2084 [math.oc].

## کنترل بهینه‌ی دستگاه‌های تأخیری با استفاده از تقریب توابع ترکیبی

محمد رضا محمدی مطلق\*، اسداله محمودزاده وزیری، و الهه پامرغی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

*motlagh@birjand.ac.ir*

*amvaziri@birjand.ac.ir*

*pamorghi\_num.analysis93@birjand.ac.ir*

چکیده. در این مقاله روشی عددی برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی دستگاه‌های تأخیری خطی متغیر با زمان، با تابعی معیار درجه‌ی دوم ارائه شده است. اساس این روش، تقریب با توابع ترکیبی ضربی بلوکی-برنولی است. با استفاده از این روش حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی دستگاه‌های تأخیری به حل معادلات جبری تقلیل می‌یابد.

### ۱. مقدمه

ساختار کلی یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت زیر می‌باشد؛

$$\dot{X}(t) = E(t)X(t) + F(t)X(t - \tau) + G(t)V(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1)$$

$$X(0) = X_0 \quad (2.1)$$

$$X(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t < 0 \quad (3.1)$$

که  $X(t) \in R^l$  و  $u(t) \in R^q$ ،  $E(t)$  و  $F(t)$  و  $G(t)$  ماتریس‌های با ابعاد مناسب هستند.  $X_0$  یک بردار ثابت مشخص و  $\phi(t)$  یک تابع معین دلخواه است. هدف یافتن کنترل بهینه‌ی  $U(t)$  و منحنی حالت  $X(t)$  متناظر با آن است،  $(0 \leq t \leq 1)$ ، که با برقراری قیود (۱.۱)-(۳.۱) تابعی درجه‌ی دوم

$$J = \frac{1}{2} X^T(1) S X(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (4.1)$$

کمینه (بیشینه) شود، که در آن  $S$ ،  $Q(t)$  و  $R(t)$  ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب،  $Q(t)$  ماتریس متقارن نیمه معین مثبت و  $R(t)$  ماتریس متقارن معین مثبت است [۱]. در روند حل این دستگاه با معادلات ریکاتی مواجه می‌شویم که حل این معادلات با دشواری‌های

2010 Mathematics Subject Classification. 49N05, 41A20.

واژگان کلیدی. کنترل بهینه، تأخیر، توابع ترکیبی، تقریب توابع، ضربه بلوکی، چندجمله‌ای‌های برنولی.  
\* سخنران

فراوانی همراه است [۳]. برای رفع این مشکل، دستگاه فوق را با استفاده از توابع ترکیبی برنولی-ضربه بلوکی به دستگاه معادلات جبری تبدیل کرده که حل آن به مراتب ساده‌تر است.

## ۲. توابع ترکیبی و تقریب توابع

توابع ترکیبی  $b_{nm}(t)$  که  $n = 1, 2, \dots, N$  و  $m = 0, 1, \dots, M$  در بازه  $[0, t_f]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند؛

$$b_{nm}(t) = \begin{cases} \beta_m \left( \frac{N}{t_f} t - n + 1 \right) & t \in \left[ \frac{n-1}{N} t_f, \frac{n}{N} t_f \right] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1.2)$$

که  $n$  و  $m$  به ترتیب مرتبه‌ی توابع ضربه بلوکی و چندجمله‌ای‌های برنولی هستند [۴]. فرض کنید  $H = L^2[0, 1]$  و  $\{b_{10}(t), b_{20}(t), \dots, b_{NM}(t)\} \subset H$  مجموعه‌ای از توابع ترکیبی ضربه بلوکی-برنولی باشند.  $Y$  مجموعه‌ی فضای برداری تشکیل شده از

$$\{b_{10}(t), b_{20}(t), \dots, b_{N0}(t), b_{11}(t), \dots, b_{NM}(t)\}$$

باشد و  $f$  تابعی دلخواه در  $H$  باشد. چون  $Y$  یک فضای برداری با بعد متناهی است.  $f$  یک تقریب بهینه‌ی منحصر به فرد مانند  $f_0$  در آن دارد که

$$\forall y \in Y \quad \|f - f_0\| \leq \|f - y\|$$

و چون  $f_0 \in Y$  لذا ثابت‌های منحصر به فرد  $c_{10}, c_{20}, \dots, c_{NM}$  به طوری که:

$$f \simeq f_0 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{nm} b_{nm}(t) = C^T B(t) \quad (2.2)$$

که

$$B^T(t) = [b_{10}(t), b_{20}(t), \dots, b_{N0}(t), b_{11}(t), \dots, b_{NM}(t)]$$

و

$$C^T(t) = [c_{10}(t), c_{20}(t), \dots, c_{N0}(t), c_{11}(t), \dots, c_{NM}(t)]$$

ضرایب  $c_{nm}$  از  $C^T$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$c_{nm} = \frac{1}{N^m m!} \left( \frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{N} t_f}$$

## ۳. بیان مساله

با انتخاب  $M$  و  $N$  مناسب  $X(t)$  و  $U(t)$  را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_l(t)]^T, \quad U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_q(t)]^T \quad (1.3)$$

بنا به (۲.۲) داریم؛

$$x_i(t) = B^T(t) X_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad u_i(t) = B^T(t) U_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.3)$$

که در آن  $X_i$  و  $U_i$  بردارهای ضرایب برنولی-ضربه بلوکی  $x_i(t)$  و  $u_i(t)$  هستند. حال با جایگذاری هر یک از روابط فوق، در بردارهای  $X(t)$  و  $U(t)$  در رابطه‌ی (۱۰۳) داریم:

$$X(t) = (I_l \otimes B^T(t)) X, \quad U(t) = (I_q \otimes B^T(t)) U$$

که  $X$  و  $U$  به ترتیب بردارهای با بعد  $l(M+1)N \times l$  و  $q(M+1)N \times l$  به صورت زیر می‌باشند؛

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_l]^T, \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_q]^T$$

و  $I_q$  و  $I_l$  ماتریس‌های همانی از مرتبه‌ی  $l$  و  $q$  می‌باشند،  $B(t)$  بردار  $(M+1)N \times 1$  بعدی و  $\otimes$  نمایانگر ضرب کرونکر است. با توجه به تعریف ضرب کرونکر [۲]،  $I_l \otimes B(t)$  ماتریسی  $l(M+1)N \times l$  بعدی و  $I_q \otimes B(t)$  ماتریسی  $q(M+1)N \times q$  بعدی می‌باشند. با قرار دادن  $\hat{B}_1(t) = I_q \otimes B(t)$  و  $\hat{B}(t) = I_l \otimes B(t)$  داریم:

$$X(0) = \hat{B}^T(t)d, \quad \phi(t - \tau) = \hat{B}^T(t)W$$

که  $d$  و  $W$  بردارهای از مرتبه‌ی  $l(M+1)N \times 1$  هستند. حال هر یک از توابع  $E(t)$ ،  $F(t)$  و  $G(t)$  بر حسب توابع ترکیبی بسط داده شده‌اند بنابراین به شکل

$$E(t) = E^T \hat{B}^T(t), \quad F(t) = F^T \hat{B}(t), \quad G(t) = G^T \hat{B}_1(t)$$

در نظر گرفته می‌شوند، که  $E^T$ ،  $F^T$  و  $G^T$  ماتریس‌هایی به ترتیب با ابعاد  $l \times l(M+1)N$  و  $l \times l(M+1)N$  و  $l \times q(M+1)N$  هستند. می‌توانیم  $X(t - \tau)$  را بر حسب توابع ترکیبی به شکل

$$X(t - \tau) = \begin{cases} \hat{B}^T(t)W & 0 \leq t < \tau \\ \hat{B}^T(t)\hat{D}^T X & \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

بنویسیم که  $\hat{D} = I_l \otimes D$ ، که ماتریس  $D$  ماتریس عملیاتی تأخیر نامیده می‌شود. همچنین داریم؛

$$\begin{aligned} E(t)X(t) &= E^T \hat{B}(t)\hat{B}^T(t)X = \hat{B}^T(t)\tilde{E}^T X, \\ G(t)U(t) &= G^T \hat{B}_1(t)\hat{B}_1^T(t)U = \hat{B}_1^T(t)\tilde{G}^T U, \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

$$\int_0^t \hat{B}^T(t')dt' = (I_l \otimes B^T(t))(I_l \otimes P^T) = \hat{B}^T(t)\hat{P}^T,$$

$$\int_0^1 F(t')X(t' - \tau)dt' = \begin{cases} \hat{B}^T(t)\hat{P}^T \tilde{F}^T W, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \hat{B}^T(t)\tilde{Z}\tilde{F}^T W + \hat{B}^T(t)\hat{P}^T \tilde{F}^T \hat{D}^T X, & \tau \leq t \leq 1, \end{cases}$$

که  $\tilde{E}$ ،  $\tilde{F}$  و  $\tilde{G}$  ماتریس‌های عملیاتی حاصل ضرب و  $P$  ماتریس عملیاتی انتگرال است که به سادگی قابل محاسبه‌اند. همچنین؛

$$\int_0^t \hat{B}^T(t)dt = \hat{B}^T(t)Z$$



که  $Z$  یک ماتریس عددی مربعی از مرتبه  $L(M+1)N$  است. با انتگرال گیری از (۱.۱) و با استفاده از روابط (۲.۱) و (۳.۱) و نتایج بدست آمده داریم:

$$A^* = (\hat{P}^T \tilde{E}^T + \hat{P}^T \tilde{F}^T \hat{D}^T - I)X + \hat{P}^T \tilde{F}^T W + Z \tilde{F}^T W + \hat{P}^T \tilde{G}^T U + d = 0.$$

همچنین با استفاده از روابط (۴.۱) و (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} X^T \hat{B}^T(1)X + \frac{1}{2} X^T \left[ \int_0^1 \hat{B}(t)Q(t)\hat{B}^T(t)dt \right] X + \frac{1}{2} U^T \left[ \int_0^1 \hat{B}_1^T(t)dt \right] U \\ &= \frac{1}{2} X^T (B(1)B^T(1) \otimes S)X + \frac{1}{2} X^T \left[ \int_0^1 \hat{B}(t)B^T(t) \otimes Q(t)dt \right] X \\ &\quad + \frac{1}{2} U^T \left[ \int_0^1 B(t)B^T(t) \otimes R(t)dt \right] U. \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

برای مسائل متغیر با زمان،  $Q(t)$  و  $R(t)$  توابعی بر حسب زمان هستند و

$$\int_0^1 B(t)B^T(t) \otimes Q(t)dt, \quad \int_0^1 B(t)B^T(t) \otimes R(t)dt$$

را می توان به صورت عددی ارزیابی نمود. برای مسائل ثابت با زمان،  $Q(t)$  و  $R(t)$  ماتریس های ثابت هستند و می توانند از انتگرال حذف شوند. در این حالت می توان (۴.۳) را به صورت

$$J = \frac{1}{2} X^T (B(1)B^T(1) \otimes S)X + \frac{1}{2} X^T (K \otimes Q)X + \frac{1}{2} U^T (K \otimes R)U,$$

بازنویسی کرد که  $K$  ماتریس انتگرال ضرب داخلی دو تابع ترکیبی از ضربه بلوکی و چندجمله ای برنولی می باشد.

#### ۴. حل مساله ی بهینه سازی

با استفاده از روش ارائه شده مساله ی کنترل بهینه به مساله ی بهینه سازی پارامتری زیر تبدیل می گردد.

مساله: با فرض آنکه  $\lambda$  نمایانگر مضارب لاگرانژ باشد، تابعی افزوده  $J^*(X, U, \lambda) = J(X, U) + \lambda^T A^*$ ، شرایط لازم برای کمینه (بیشینه) کردن  $J^*$  به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x} J^*(X, U, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} J^*(X, U, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} J^*(X, U, \lambda) = 0, \quad (۱.۴)$$

بیان می گردند.

#### مراجع

1. D.E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*, Courier Corporation, 2012.
2. P. Lancaster, *Theory of Matrices*, Academic Press, New York, 1969.
3. D.S. Naidu, *Optimal control systems*, CRC press, 2002.
4. Y. Ordokhani, M. Razzaghi, *Optimal Control of delay systems by using a hybrid function approximation*, J. Optim. Theory Appl. 153 (2012), 338–356.
5. M. Razzaghi, H.R. Marzban, *Direct method for variational problems via hybrid of block-pulse and Chebyshev functions*, Math. Probl. Eng. 6 (2000), 85–97.

## بررسی ساختارها و عملگرها روی گراف‌های فازی

فریدون رهبرنیا، مصطفی توکلی، و مهدی کاظمی\*

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
rahbarnia@um.ac.ir  
m\_tavakoli@um.ac.ir  
kazemimc2@gmail.com

چکیده. تحقیقات در مورد مجموعه‌های فازی در زمینه ریاضیات کاربردی شاهد رشد نمایی در سال‌های اخیر بوده چنانکه دامنه این تحقیقات از اصول علم ریاضی شامل منطق، جبر، آنالیز و ... تا الگوسناسی، نظریه، شبکه‌های عصبی، هوش مصنوعی گسترده است. در نتیجه از تئوری مجموعه‌های فازی می‌توان به عنوان یک پدیده بالقوه به منظور تحقیقات میان رشته‌ای استفاده نمود. ارتباط میان گراف و نظریه مجموعه‌های فازی موضوعی جدید و قابل تامل برای محققان است. لذا انگیزه اصلی این مقاله بررسی ارتباط میان این دو مفهوم مهم است. در حقیقت بر آنیم تا ارتباط میان گراف، مجموعه‌های فازی و اعمال روی گراف‌های فازی را مورد مطالعه قرار دهیم.

### ۱. مقدمه

ابزار متداول به منظور مدل سازی، استدلال و محاسبات سیستم‌های معمول به صورت مشخص، قطعی و صریح می‌باشد. فرض صریح بودن سیستم بدان معنا است که پارامترهای مدل دقیقاً ارائه کننده پدیده نمونه سازی شده یا خصیصه‌های مورد بررسی سیستم مدل شده باشد. با توجه به پیچیدگی روزافزون و گسترش سیستم‌ها توانایی ما برای بررسی صریح، دقیق و همه جانبه سیستم‌ها بسیار پرهزینه و زمانبر خواهد بود. به علاوه در نمونه سازی یک سیستم تلاش ما برای بیشینه سازی داده‌های ورودی معمولاً منتج به کاهش کارآمدی مدل بدست آمده می‌گردد. یکی از معانی که از واژه عدم قطعیت استنباط می‌شود مفهوم ابهام است. ابهام در یک سیستم مفروض عبارت است از عدم توانایی در تفکیک و تمیز دادن اجزا یا خصوصیات آن سیستم. یک مجموعه فازی به صورت ریاضی با تخصیص یک مقدار که نمایانگر درجه عضویت به هر یک از عناصر موجود مجموعه مرجع است تعریف می‌گردد. این درجه عضویت نمایانگر میزان شباهت و تطابق یک عنصر منفرد با مفهومی است که در مجموعه فازی مورد نظر ارائه شده است.

واژگان کلیدی. نظریه گراف، مجموعه فازی، اعمال گراف، گراف فازی.  
\* سخنران

قابلیت مجموعه‌های فازی برای بیان انتقال تدریجی درجه وابستگی عناصر از عضویت به عدم عضویت باعث افزایش کارایی و قابلیت استفاده این نوع مجموعه‌ها گردیده است. این خصوصیت ما را قادر می‌سازد تا مفهوم عدم قطعیت را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم، علاوه بر آن از مفاهیم مبهم مورد استفاده در زبان طبیعی هم در تحلیل موارد رخ داده استفاده کنیم. هر عضو از مجموعه قطعی، فازی نیز می‌باشد ولی عکس این قضیه ثابت نیست. تعمیم قواعد ریاضی مجموعه‌های قطعی به مجموعه‌های فازی همانند ایده تعمیم اعداد حقیقی به اعداد مختلط، طبیعی به نظر می‌رسد. از اینرو فازی سازی در واقع تعمیم قواعد مجموعه‌های قطعی می‌باشد نه جایگزینی آن قواعد.

در این مقاله اعمال روی گراف‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از اعمال روی گراف‌ها می‌توان به اجتماع، پیوند، حاصلضرب دکارتی و ... نام برد. سپس گراف فازی را مطالعه می‌کنیم. ابتدا گراف فازی را با استفاده از  $\alpha$ -برش تعریف کرده و سپس مفاهیم گراف را با استفاده از فازی تعمیم می‌دهیم. پس از آن اعمال روی گراف‌های فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا گراف مکمل فازی را مطالعه کرده و سپس اعمال روی گراف‌های فازی را مد نظر خواهیم داد. نتایجی را برای مکمل گراف فازی و اعمال روی گراف‌های فازی بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱** (اجتماع دو گراف). گراف  $G = (V, E)$  که در آن  $V = V_1 \cup V_2$  و  $E = E_1 \cup E_2$  را اجتماع  $G_1$  و  $G_2$  نامیم و با  $G_1 \cup G_2$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲.۱** (اشتراک دو گراف). اگر  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  آنگاه گراف  $G = (V, E)$  که در آن  $V = V_1 \cap V_2$  و  $E = E_1 \cap E_2$  را اشتراک گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  نامیم و آن را با  $G_1 \cap G_2$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳.۱** (پیوند دو گراف). فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  گراف‌هایی با مجموعه رئوس مجزا باشند. در این صورت پیوند  $G_1 \vee G_2$  از  $G_1$  و  $G_2$  عبارت است از زیرگراف  $G_1 + G_2$  به طوری که هر راس  $G_1$  با هر راس  $G_2$  مجاور باشد.

**قضیه ۴.۱** (۱)

$$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) + E(G_2) - E(G_1 \cap G_2)$$

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) + V(G_2) - V(G_1 \cap G_2).$$

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) + V(G_2) \text{ و } E(G_1 + G_2) = E(G_1) + E(G_2) \quad (۲)$$

$$V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) + V(G_2) + E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) + E(G_2) + E(G_1)E(G_2) \quad (۳)$$

**تعریف ۵.۱** ( حاصلضرب دکارتی دو گراف ). حاصلضرب دکارتی  $G \square H$  از دو گراف  $G$  و  $H$  عبارت است از گراف ساده با مجموعه رئوس  $V(G) \times V(H)$  به طوری که دو راس  $(g, h)$  و  $(g', h')$  در  $G \times H$  با هم مجاور هستند اگر یا  $g = g'$  و  $h$  با  $h'$  مجاور است یا  $g$  با  $g'$  در  $G$  مجاور است و  $h = h'$ . به بیان دیگر

$$V(G \square H) = \{(g, h) | g \in V(G) \text{ و } h \in V(H)\},$$

$$E(G \square H) = \{(g, h)(g', h') | g = g', hh' \in E(H), \text{ یا } gg' \in E(G), h = h'\}.$$

**تعریف ۶.۱.** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه فازی از  $X$  باشند، در این صورت برای هر  $x \in X$  داریم:

$$\begin{aligned}(A \vee B)(x) &= \max(A(x), B(x)); \\ (A \wedge B)(x) &= \min(A(x), B(x)).\end{aligned}\quad (۱.۱)$$

**تعریف ۷.۱.** گراف فازی از سه تایی مرتب  $G = (V, \delta, \mu)$  که در آن  $V$  مجموعه‌ای از رئوس  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  زیرمجموعه‌ای از  $V$  و  $\delta$  زیرمجموعه فازی از  $V$  که  $\delta : V \rightarrow [0, 1]$  و  $\mu$  یک رابطه فازی روی  $V \times V$  که  $\mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$  است، به طوری که  $\mu(v_j, v_j) \leq 1$  و  $1 \leq i, j \leq n$  که  $\wedge \{\delta(v_i), \delta(v_j)\}$

توجه کنید که در این جا گراف فازی  $G$  را بدون دور در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که  $V$  متناهی و ناتهی باشد و  $\mu$  بازتابی (به عبارت دیگر  $\mu(u, u) = \delta(u), \forall u \in V$ ) و متقارن (به عبارت دیگر  $\mu(u, v) = \mu(v, u), \forall (u, v) \in V$ ) باشد.

**تعریف ۸.۱.** برش گراف فازی  $G = (V, \delta, \mu)$  به صورت  $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$  تعریف شده که در آن  $V_\alpha = \{v \in V \mid \delta \geq \alpha\}$  و  $E_\alpha = \{e \in E \mid \mu \geq \alpha\}$ .

**تعریف ۹.۱.** دو رأس که روی یک یال یکسان قرار دارند، مجاور نامیده می‌شوند و دو یال که در رأس یکسانی قرار گرفته‌اند، یال مجاور نامیده می‌شوند و دو یال که در رأس یکسانی قرار گرفته‌اند، یال مجاور نامیده می‌شوند.

در صورتی که هم رأس و هم یال فازی باشند مفهوم مجاورت به صورت زیر است.

**تعریف ۱۰.۱.** دو رأس  $u$  و  $v$  برای هر یال قوی  $(\mu(u, v) > 0)$  در  $G = (V, \delta, \mu)$  مجاور نامیده می‌شوند، اگر  $\frac{1}{2} \min\{\delta(u), \delta(v)\} \leq \mu(uv)$ .

**تعریف ۱۱.۱** (روابط فازی). (۱) فرض کنیم  $\tilde{G}$  یک گراف فازی باشد و  $R$  رابطه‌ای فازی روی رأس‌های گراف  $\tilde{G}$  باشد آن را بازگشتی گوییم اگر

$$\forall x \in V(\tilde{G}), \quad \mu_R(x, x) = 1$$

(۲) فرض کنیم  $\tilde{G}$  یک گراف فازی باشد و  $R$  رابطه‌ای فازی روی رأس‌های گراف  $\tilde{G}$  باشد آن را تقارنی گوییم اگر

$$\forall x, y \in V(\tilde{G}), \quad \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = m, \quad m \geq 0$$

(۳) فرض کنیم  $\tilde{G}$  یک گراف فازی باشد و  $R$  رابطه‌ای فازی روی رأس‌های گراف  $\tilde{G}$  باشد آن را تعدی گوییم اگر

$$\forall (x, y), (y, z), (x, z) \in E(\tilde{G}), \quad \mu_R(x, z) \geq \max_y \min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))$$

(۴) فرض کنیم  $\tilde{G}$  یک گراف فازی باشد و  $R$  رابطه‌ای فازی روی رأس‌های گراف  $\tilde{G}$  باشد آن را هم‌ارزی گوییم اگر انعکاسی، تعدی و تقارنی باشد.

**تعريف ۱۲.۱.** فرض می‌کنیم  $G_1 : (\mu_1, R_1)$  و  $G_2 : (\mu_2, R_2)$  دو گراف فازی با  $G_1^* : (V_1, E_1)$  و  $G_2^* : (V_2, E_2)$  باشد که در آن  $V_1 \cap V_2 = \phi$ . همچنین فرض می‌کنیم  $G^* = G_1^* \cup G_2^* = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ . سپس اجتماع دو گراف فازی  $G_1$  و  $G_2$  یک گراف فازی  $G = G_1 \cup G_2 : (\mu_1 \cup \mu_2, R_1 \cup R_2)$  است که در آن

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(u) = \begin{cases} \mu_1(u) & \text{if } u \in V_1 - V_2 \\ \mu_2(u) & \text{if } u \in V_2 - V_1 \end{cases}$$

و

$$(R_1 \cup R_2)(u, v) = \begin{cases} R_1(u, v) & \text{if } uv \in E_1 - E_2 \\ R_2(uv) & \text{if } uv \in E_2 - E_1 \end{cases}$$

**تعريف ۱۳.۱.** در نظر می‌گیریم  $G^* = G_1^* + G_2^* = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E')$  که در آن  $E'$  مجموعه همه‌ی راس‌ها از  $V_1$  و  $V_2$  است که  $V_1 \cap V_2 = \phi$ . سپس مجموع دو گراف فازی  $G_1$  و  $G_2$  یک گراف فازی  $G = G_1 + G_2 : (\mu_1 + \mu_2, R_1 + R_2)$  که در آن داریم

$$(\mu_1 + \mu_2)(u) = (\mu_1 \cup \mu_2)(u) \quad u \in V_1 \cup V_2$$

و

$$(R_1 + R_2)(uv) = \begin{cases} (R_1 \cup R_2)(uv) & \text{if } uv \in E_1 \cup E_2 \\ \mu_1(u) \wedge \mu_2(v) & \text{if } uv \in E'. \end{cases}$$

**قضیه ۱۴.۱.** فرض می‌کنیم  $G_1 : (\mu_1, R_1)$  و  $G_2 : (\mu_2, R_2)$  دو گراف فازی باشد. در این صورت

$$\overline{G_1 + G_2} \cong \overline{G_1} \cup \overline{G_2} \quad (۱)$$

$$\overline{G_1 \cup G_2} \cong \overline{G_1} + \overline{G_2} \quad (۲)$$

### مراجع

1. Zhong Y. and Shi Y., Duality in fuzzy multi-criteria and multi-constraint level linear programming: A parametric approach., Fuzzy Sets and Systems, 132:335-346, 2002.
2. Wu H.-C., Evaluate Fuzzy Optimization Problems Based on Biobjective Programming Problems., Computers and Mathematics with Applications, 47:893-902, 2004.
3. Hammack R., Imrich W., and Klavžar S., Handbook of product graphs, CRC Press Taylor & Francis Group, Second Edition, 2011.
4. Balakrishnan, R., Ranganathan, K., A Textbook of Graph Theory, Springer Verlag, 1999.
5. Stefanini L., Sorini L., and Guerra M. L., Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus., Fuzzy Sets and Systems, 157:2423-2455, 2006.

## حل مسائل کنترل بهینه درجه دوم غیرخطی مقید با استفاده از روش تکراری چندجمله‌ای لژاندر

نرگس برومندنژاد\* و محمدعلی پرتانیان

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری  
nargesboromand42@gmail.com  
partanian@hsu.ac.ir

چکیده. در این مقاله به ارائه روشی برای حل مسائل کنترل بهینه درجه دوم غیرخطی مقید با استفاده از روش تکراری چندجمله‌ای لژاندر می‌پردازیم. برای این منظور مسئله کنترل بهینه غیرخطی اولیه با دنباله‌ای از مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم زمان-متغیر جایگزین می‌شود که جواب این دنباله همگرا به جواب مساله اصلی خواهد بود. مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم زمان-متغیر به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم استاندارد با تقریب متغیرهای حالت به سری لژاندر متناهی با پارامترهای مجهول تبدیل می‌کنیم.

### ۱. مقدمه

نظریه کنترل سیستم‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهد که قابل کنترل می‌باشند، به عبارت دیگر تغییرات سیستم می‌تواند تحت تاثیر عوامل بیرونی کنترل شود. سیستم‌های کنترلی معمولاً توسط دستگاهی از معادلات دیفرانسیل تعریف می‌شوند. در مسائل کنترل بهینه هدف یافتن تابع کنترلی است که در دینامیک سیستم و شرایط مرزی صدق کرده و تابع معیار معینی را بهینه کند. برای حل مسائل از روش‌های تکراری و عددی که نسبت به سایر روش‌ها کارایی بیشتری دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱].

---

واژگان کلیدی. مسئله کنترل بهینه درجه دوم غیرخطی مقید، چندجمله‌ای لژاندر، متغیر حالت و کنترل اشباع

\* سخنران

## ۲. آنالیز روش

تابع هدف درجه دوم

$$\min J = x(t_f)^T S x(t_f) + \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (۱.۲)$$

$$s.t \dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (۲.۲)$$

$$\varphi(x(t_f), t_f) = 0 \quad (۳.۲)$$

$$x(t) \leq X_{\max}, \quad x(t) \geq X_{\min}, \quad u(t) \leq U_{\max}, \quad u(t) \geq U_{\min} \quad (۴.۲)$$

را که محدودیت (۲.۲) معادلات حالت سیستم و شرایط اولیه، محدودیت (۳.۲) محدودیت حالت نهایی و محدودیت‌های (۴.۲) محدودیت‌های مربوط به متغیرهای حالت و کنترل اشباع می‌باشند.  $Q$  و  $S$  نیمه معین مثبت،  $R$  معین مثبت،  $x \in R^n$  بردار متغیرهای حالت،  $R^m$  بردار متغیرهای کنترل،  $x_0 \in R^n$  بردار شرایط اولیه و تابع غیرخطی  $f$  پیوسته مشتق پذیر نسبت به همه عناصر  $(x(t), u(t), t)$  می‌باشد، و  $m \leq n$ ،  $U_{\min}$ ،  $U_{\max}$ ،  $X_{\min}$ ،  $X_{\max}$  و  $t_f$  مقادیر ثابت هستند در نظر می‌گیریم. با استفاده از تکنیک تکراری مسئله را به دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه درجه دوم زمان-متغیر تبدیل می‌کنیم [۴].

$$\min J^{[i]} = x(1)^{[i]T} S x(1)^{[i]} + \frac{t_f}{2} \int_{-1}^1 (x^{[i]T} Q x^{[i]} + u^{[i]T} R u^{[i]}) d\tau \quad (۵.۲)$$

$$s.t \frac{dx^{[i]}}{d\tau} = \frac{t_f}{2} \left[ A(x^{[i-1]}(\tau)) x^{[i]} + B(x^{[i-1]}(\tau)) u^{[i]} \right], \quad x^{[i]}(-1) = x_0 \quad (۶.۲)$$

$$\varphi(x(1)^{[i]}, 1) = 0$$

$$x(\tau)^{[i]} \leq X_{\max}, \quad x(\tau)^{[i]} \geq X_{\min}, \quad u(\tau)^{[i]} \leq U_{\max}, \quad u(\tau)^{[i]} \geq U_{\min}$$

$$i \geq 1$$

تقریب متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل را توسط سری لژاندر با پارامترهای مجهول به صورت

$$x_j^{[i]} = \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} P_i(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad u_l^{[i]} = \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} P_i(\tau), \quad l = 1, 2, \dots, m$$

برای  $i = 1, 2, \dots$  نوشته و  $a$  و  $b$  پارامترهای مجهول،  $b$  تابعی از  $a$  و  $P_i(\tau)$  چندجمله‌ای لژاندر مرتبه  $i$ ام است. برای نوشتن فرم ماتریسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \hat{J}^{[i]} &= a^T \vartheta^T(1) S \vartheta(1) a + \frac{t_f}{2} \int_{-1}^1 (a^T \vartheta^T Q \vartheta a + a^T v^T R v a) d\tau \\ &= a^T \left( \vartheta^T(1) S \vartheta(1) + \frac{t_f}{2} \int_{-1}^1 (\vartheta^T Q \vartheta + v^T R v) d\tau \right) a \end{aligned}$$

و  $H = 2(\vartheta^T(1)S\vartheta(1)) + t_f \int_{-1}^1 (\vartheta^T Q \vartheta + v^T R v) d\tau$  لذا داریم:

$$\hat{J}^{[k]} = \frac{1}{2} a^T H a$$

که بردار  $a^T = [a_0^{(1)} \ a_1^{(1)} \ \dots \ a_N^{(1)} \ a_0^{(2)} \ a_1^{(2)} \ \dots \ a_N^{(2)} \ \dots \ a_0^{(z)} \ \dots \ a_N^{(z)}]$  پارامتر مجهول و  $H$  ماتریس هسین معین مثبت [۳] و  $z$  تعداد حالت‌های تقریب است. در محدودیت‌های حالت با استفاده از خاصیت مقدار اولیه چندجمله‌ای لژاندر در  $\tau = -1$  و  $\tau = 1$  که به ترتیب بردار شرایط اولیه و بردار حالت نهایی هستند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_0^{(j)} - a_1^{(j)} + a_2^{(j)} - a_3^{(j)} + \dots + (-1)^N a_N^{(j)} - x_j(-1) &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ a_0^{(j)} + a_1^{(j)} + a_2^{(j)} + a_3^{(j)} + \dots + a_N^{(j)} - x_j(1) &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

که فرم فشرده ماتریسی بصورت  $F_1 a = b_1$  می‌باشد.

با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر،  $r + 1$  محدودیت متغیر حالت و کنترل اشباع بصورت

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} P_i(\tau_s) \leq U_{\max} \quad , \quad - \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} P_i(\tau_s) \leq -U_{\min} \\ \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} P_i(\tau_s) \leq X_{\max} \quad , \quad - \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} P_i(\tau_s) \leq -X_{\min} \end{aligned}$$

تقریب زده می‌شوند. فرم ماتریسی روابط ذکر شده به شکل  $F_2 a \leq b_2$  درمی‌آید. بنابراین در هر تکرار مدل مورد بحث به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_a \quad & \frac{1}{2} a^T H a \\ \text{s.t.} \quad & F_1 a = b_1 \quad , \quad F_2 a \leq b_2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

رابطه (7.2) یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم استاندارد با قید نامساوی است، که به راحتی می‌توان حل کرد [۲].

۱.۲. مثال. مساله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}_1 &= x_2 \quad , \quad x_1(0) = 1 \quad , \quad \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \quad , \quad x_2(0) = 0 \\ x_1(5) &= -1 \quad , \quad x_2(5) = 0 \quad , \quad |u(t)| \leq 0.75 \end{aligned}$$

حل: ابتدا مسئله را با استفاده از تکنیک تکرار به دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم متغیر-زمان تبدیل کرده و برای  $N = 1$  تکرار اول را حل می‌کنیم. متغیر حالت  $x_1^1$  را با سری لژاندر با پارامتر مجهول تقریب می‌زنیم، بنابراین داریم:

$$x_1^1 = a_0^1 P_0 + a_1^1 P_1 \quad , \quad \dot{x}_1^1 = a_1^1 P_0 \quad , \quad x_2^1 = \frac{2}{5} a_1^1 P_0 \quad \quad x_2^1 = 0$$



$$u^1 = a_0^1 P_0 + a_1^1 P_1$$

ماتریس  $a$  را بصورت  $a^T = [a_0^1 \ a_1^1]$  تعریف کرده و متغیرها را به فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ 0 & \frac{2}{5}P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^1 \\ a_1^1 \end{bmatrix} = \vartheta a \quad , \quad u_1^1 = [P_0 \ P_1] \begin{bmatrix} a_0^1 \\ a_1^1 \end{bmatrix} = va$$

$$.H = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 2 & 2\tau \\ 2\tau & 2\tau^2 + \frac{4}{25} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{124}{75} \end{bmatrix}$$

نوشته، در نتیجه مقدار متغیرهای حالت را در نقطه  $\tau = -1$  و  $\tau = 1$  محاسبه کرده و به فرم ماتریسی

$$\text{تبدیل می‌کنیم، که با } F_1 a = b_1 \text{ معادل} \quad \begin{bmatrix} x_1^1(-1) \\ x_2^1(-1) \\ x_1^1(1) \\ x_2^1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^1 \\ a_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

است.

محدودیت کنترل اشباع در نقاط گسسته  $\tau = -1, -0.9, -0.8, -0.7, \dots, 0.7, 0.8, 0.9, 1$

$$F_2 a \leq b_2 \text{ می‌باشد، که با} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -0.9 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0.9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^1 \\ a_1^1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 0.75 \\ \vdots \\ 0.75 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

برای متغیر کنترل  $u_1^1$  بصورت

معادل است. بنابراین مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم با قید نامساوی را با یکی از روش‌های موجود حل کرده و جواب بهینه را بدست می‌آوریم.

### ۳. دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی درجه دوم مقید مورد بررسی قرار گرفت، متغیرهای حالت را توسط چندجمله‌ای‌های لژاندر تقریب زدیم، که مساله کنترل بهینه غیرخطی مقید به دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم تبدیل می‌شود. با ارائه مثال کارایی روش را مورد بررسی قرار دادیم.

### مراجع

۱. ع. وحیدیان و ق. بزرگ نیا، مقدمه‌ای بر نظریه کنترل و کنترل بهینه، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۲.
2. M. S. Bazaraa and J. J. Jarvis and H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, Published by John Wiley and Sons, 2010.
3. H. Jaddu and A. Majdalawi, *Legendre Polynomials Iterative Technique for Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems*, International Journal of Control and Automation. 7 (2014), no. 3, 17-28.
4. H. Jaddu, *Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasi-linearization and Chebyshev polynomials*, Journal of the Franklin Institute. 339 (2002), no. 4, 479-498.

## معرفی و بررسی معیارهای انتخاب مدل استوار در برآوردگر لیو و مقایسه آن با برآوردگر کمترین مربعات معمولی

زهرا کریمی<sup>1</sup> \*، جواد قاسمیان<sup>2</sup>، و امید سلیمانی فرد<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان  
zahrakarimi\_far90@yahoo.com

ghasemian@du.ac.ir

<sup>3</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
omidsolaymanifard@yahoo.com

چکیده. در تحلیل رگرسیون خطی، فرآیند انتخاب متغیرهای مستقل و نوع مدل انتخابی تاثیر زیادی روی نقاط دور افتاده یا پرت دارد. در این مقاله سعی داریم به معرفی و بررسی راهکاری مناسب برای انتخاب زیر مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل در صورت وجود پدیده هم‌خطی چندگانه، نقاط پرت و تردید نسبت به پذیره نرمال بودن خطا در رگرسیون بپردازیم. بعلاوه نحوه استفاده از معیار انتخاب استوار با برآوردگرهای لیو و لیوی نوع  $M$  را مورد بررسی قرار داده و آن را با برآوردگر کمترین مربعات مقایسه می‌کنیم.

### ۱. مقدمه

روش‌های نسبی در انتخاب متغیرهای مستقل در رگرسیون بر اساس برآوردگرهای کلاسیک و آزمون‌هاست. در دهه‌های اخیر روش‌های بهتری نسبت به روش برآوردگرهای کلاسیک ارائه شده‌است که مسأله انتخاب متغیر مرتبط به آن تا حدودی نادیده گرفته شده‌است. به عنوان مثال  $C_P$  مالوز [۴] یک روش انتخاب قدرتمند در رگرسیون است، اما ارقام  $C_P$  براساس برآورد حداقل مربعات به دست می‌آید که این معیار نسبت به نقاط پرت در مواقعی که خطاها در توزیع

---

2010 Mathematics Subject Classification. 6207, 62j07, 62j20  
واژگان کلیدی. برآوردگر کمترین مربعات معمولی، برآوردگر استوارلیو،  $C_p$  استوار،  $T_p$  استوار، انتخاب مدل استوار.  
\* زهرا کریمی

نرمال نیستند بسیار حساس است. از سوی دیگر، با روش‌های کلاسیک برآوردیابی اصلاح نشده نمی‌توان برآوردهای استوار برای پارامترها یافت، لذا نیاز به برآوردهای استوار بیشتر احساس می‌شود. به این دلیل روش‌های انتخاب متغیر دیگری در آمار وجود دارد. مدل رگرسیون خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (1.1)$$

که  $Y$  بردار پاسخ  $n \times 1$ ؛  $X$  ماتریس پیش بینی  $n \times (k + 1)$  با فرض رتبه کامل بودن؛  $\beta$  یک بردار  $k + 1$  از پارامترهای مجهول؛  $\epsilon$  بردار خطا با میانگین ۰ و واریانس  $\sigma^2 I$  است. فرض بر این است که متغیرهای  $X$  استاندارد هستند به طوری که  $X'X$  ماتریس همبستگی باشد. هم خطی چندگانه و نقاط پرت دو مشکل اساسی در روش‌های برآورد رگرسیون هستند. برای مقابله با منحنی چندگانه روش‌هایی ارائه شده است، که یکی از رایج‌ترین آن‌ها برآوردگر رگرسیون ریج می‌باشد که عبارت است از:

$$\hat{\beta}_R(k) = (X'X + KI)^{-1} X'X \hat{\beta}_{OLS}, \quad (2.1)$$

که  $k > 0$  پارامتر انقباض است.  $\hat{\beta}_R(k)$  در جهت  $y$  به نقاط پرت حساس است، از آنجا که  $\hat{\beta}_R(k)$  تابعی از  $k$  است، ليو [۳] یک برآوردگر اریب برای  $\beta$  به شرح زیر مطرح کرد:

$$\hat{\beta}_L(d) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI) \hat{\beta}_{OLS} \quad (3.1)$$

این برآوردگر توسط کاهش برآوردگر حداقل مربعات معمولی ( $OLS$ ) با استفاده از ماتریس  $(X'X + I)^{-1} (X'X + dI)$  به دست آمده، که  $0 < d < 1$  است. از آنجا که  $OLS$  در برآوردگر ليو به کار برده می‌شود، حضور نقاط پرت ممکن است بر  $\hat{\beta}_L(d)$  اثر گذارد. برای غلبه بر این مشکل آرسلان و بیلار [۱] یک کلاس جایگزین از برآوردهای ليو-نوع  $M$  ( $LM$ ) به شرح زیر پیشنهاد دادند:

$$\hat{\beta}_{LM}(d) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI) \hat{\beta}_M \quad (4.1)$$

برآوردگر  $LM$  با منقبض سازی یک  $M$  برآوردگر ( $\hat{\beta}_M$ ) به جای برآوردگر  $OLS$  با استفاده از ماتریس  $(X'X + I)^{-1} (X'X + dI)$  به دست می‌آید. هدف اصلی از ارائه این برآوردگر مقابله با وقوع هم‌زمان هم خطی چندگانه و نقاط پرت در مجموعه داده‌هاست.

## ۲. معیارهای انتخاب مدل

۱.۲. معیار  $C_p$  استوار ( $RC_p$ ). معیار  $C_p$  مالوز [۴] یک تکنیک قوی در انتخاب مدل‌های رگرسیونی است. در روش  $OLS$ ،  $C_p$  نسبت به نقاط پرت و فرضیه نرمال بودن توزیع خطا حساس است. رونچتی و استواد [۵] معیار  $RC_p$  را به صورت:

$$RC_p = \frac{W_p}{\hat{\sigma}^2} - (U_p - V_p), \quad (1.2)$$

تعریف کردند که در آن  $w_i = \hat{w}_i^2 r_i^2 = \sum_i \hat{w}_i^2 (y_i - \hat{y}_i)^2$  و  $W_p = \sum_i w_i$  وزن مشاهده  $i$  ام و  $\hat{\sigma}^2 = W_{full}/U_{full}$  در صورت  $\hat{\sigma}^2 = W_{full}/U_{full}$  در مدل کامل است و به صورت

معرفی و بررسی معیارهای انتخاب مدل استوار در برآوردگر لیو و...

تعریف می‌شود. ثابت‌های  $U_p = \sum_i \text{var}(\hat{w}_i r_i)$  و  $V_p = \sum_i \text{var}(\hat{w}_i x_i^t (\hat{\beta} - \beta))$  فرض انتخاب درست زیرمجموعه‌ها و  $\sigma = 1$  استفاده شده‌اند [۲].  
 در  $RC_p$  استفاده شده توسط رونجیتی و استواد [۵] مقدار  $U_p - V_p$  برای تمامی مدل‌ها ثابت است اما در اینجا مقدار  $U_p - V_p$  با توجه به هر زیرمجموعه تغییر می‌کند. مقدار  $U_p - V_p$  تقریباً برابر با:

$$nE \|\eta\|^2 - 2\text{tr}(NM^{-1}) + \text{tr}(LM^{-1}QM^{-1}) \quad (۲.۲)$$

که در آن

$$E \|\eta\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \eta^2(x_i, \epsilon_i), N = E[\eta^2 \eta' x x'] \quad \text{and} \quad L = E[W' \epsilon (W' \epsilon + 4W) x x'].$$

$RC_p$  و  $C_p$  مالوز ابزارهای مفیدی برای انتخاب مدل در رگرسیون هستند در حالی که دارای نقاط ضعفی می‌باشند. مثلاً اینکه رایانه محور بوده و محاسباتی است و به خصوص در نوع استوار آن، برای برازش همه زیرمدل‌ها وقت‌گیر می‌باشد.

۲.۲. معیار  $T_p$  استوار ( $RT_p$ ). یک نسخه از  $RT_p$ ، مبتنی بر  $M$ -برآوردگرهای تعمیم یافته از پارامترهای رگرسیونی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RT_p = \hat{\beta}'_2 \sum_{22}^{-1} \hat{\beta}_2 - K + 2P, \quad (۳.۲)$$

که  $\sum_n = \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{pmatrix}$  ماتریس کواریانس و  $(X'VX)^{-1}X'VY$  ماتریس مستطیلی با قطر  $v_{ii}$  است،  $k$  و  $p$  به ترتیب ابعاد مدل کامل و زیر مدل هستند،  $\hat{\beta}_1 = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1})$  و  $\hat{\beta}_2 = (\beta_p, \dots, \beta_{k-1})$ . اگر زیر مدل  $p$  درست باشد، مقدار  $RT_p$  باید به  $p$  نزدیک شود.

### ۳. مثال عددی

برای مقایسه عملکرد معیارهای انتخاب متغیر استوار با وجود نقاط پرت و هم‌خطی چندگانه، از داده‌های ژنتیک استفاده می‌کنیم. برای این داده‌ها از معیارهای انتخاب مدل با استفاده از رگرسیون معمولی  $OLS$  و برآوردگر  $LM$  استفاده شده‌است و نتایج در شکل ۲ آورده شده‌است. در شکل ۱ به بررسی  $\beta$ ها پرداختیم. در این بررسی از ۵ متغیر که هرکدام شامل ۲۵ مشاهده‌اند استفاده کردیم. ابتدا  $\beta$ ها را مقایسه کردیم و دریافتیم که میزان  $\beta$ ها در مدل لیو کوچکتر بوده‌است. در ادامه به بررسی  $C_p$ های هر دو برآوردگر پرداخته ایم و دریافتیم  $C_p$ های متعلق به مدل لیو کوچکتر هستند و می‌توان نتیجه گرفت که برآوردگر لیو معیاری مناسب برای برآورد داده‌های وابسته به یکدیگر و نیز ابزاری مهم برای نتیجه‌گیری مقیاس‌ها و معیارهای موجود می‌باشد.

ز. کریمی، ج. قاسمیان، و. ا. سلیمانی فرد

	$\hat{\beta}(OLS)$	$\hat{\beta}_L$
$X_1$	$\begin{pmatrix} 1.7288340017385 \\ 0.0002823103862327 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6863724727929 \\ 0.03440068701786 \end{pmatrix}$
$X_2$	$\begin{pmatrix} 1.7281593839546 \\ 0.00244548070452172 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6863835363314 \\ -0.0411091671470971 \end{pmatrix}$
$X_3$	$\begin{pmatrix} 1.7299542521387 \\ 0.07371473992478 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6864133885603 \\ 0.0289471400631222 \end{pmatrix}$
$X_1, X_2$	$\begin{pmatrix} 1.727606301134 \\ 0.006649097921277 \\ 0.000050113252870472 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.68635931374621 \\ 0.034475446454671 \\ -0.041164820150501 \end{pmatrix}$
$X_2, X_3$	$\begin{pmatrix} 1.7272314962679 \\ 0.00166411634858405 \\ 0.0709979131776383 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.68639489125304 \\ -0.0410873103537928 \\ 0.02031482944629 \end{pmatrix}$
$X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 1.72829669872044 \\ 0.071974826796363 \\ 0.0413009125719246 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.68641040636419 \\ 0.0289471400631222 \\ -0.00232119034019243 \end{pmatrix}$
$X_1, X_2, X_4$	$\begin{pmatrix} 1.72431737929440 \\ 0.0050825180134303 \\ -0.0016626936260389 \\ 0.0371740019393127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6863556452107 \\ 0.034475446454655 \\ -0.0411627563832792 \\ -0.0922529764363999 \end{pmatrix}$
$X_2, X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 1.7272267899655 \\ 0.0084823946702586 \\ 0.00164098340762639 \\ 0.17440846233001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.686359378171 \\ -0.0345152048832395 \\ -0.041125083745644 \\ 0.13451890088715 \end{pmatrix}$
$X_1, X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 1.7282653225441 \\ -0.000013501584804982 \\ 0.049088768153952 \\ 0.0387278112371854 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.68639397460147 \\ -0.0410852230945999 \\ 0.028935140424028 \\ -0.0022936943445321 \end{pmatrix}$
$X_1, X_2, X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 1.7236779146381 \\ 0.004384732246913 \\ -0.00224813237001024 \\ 0.0671543181514742 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.68636638546702 \\ -0.03440068701786 \\ -0.0411809148546049 \\ 0.02893971720389 \end{pmatrix}$

شکل ۱: مقایسه ضرایب ( $\beta$ ) در برآوردهای کمترین مربعات و لیو

	$C_p(OLS)$	$C_p(L)$
$X_1$	6.69587966066705	1.3211065223765
$X_2$	6.48229245448748	1.3741165995721
$X_3$	6.85645037929373	2.6397648602464
$X_1, X_2$	7.9801794850767	2.4415323709517
$X_2, X_3$	8.14344122814255	1.9954064454541
$X_3, X_4$	8.854115402926244	2.8166722056083
$X_1, X_2, X_4$	9.97802965084052	3.2249083208753
$X_2, X_3, X_4$	10.1412181628797	3.9226645022747
$X_1, X_3, X_4$	10.3536806335637	3.8852620867682
$X_1, X_2, X_3, X_4$	11.6388124950612	4.6691342739165

شکل ۲: مقایسه  $C_p$  هادر برآوردهای کمترین مربعات و لیو

#### ۴. دست‌آوردهای پژوهش

هدف اصلی از این مقاله ارائه برآوردهای مقابله با وقوع هم‌زمان هم‌خطی‌ها و نقاط پرت در یک مجموعه داده است. معیار  $C_p$  مالوز یک شاخص استوار در ارزیابی مدل‌های رگرسیونی است. همچنین با بررسی بر روی داده‌های ژنتیک که به خوبی بیانگر بهتر بودن برآوردهای لیو می‌باشد، به این نتیجه می‌رسیم که این برآوردها معیاری مناسب جهت برازش داده‌ها می‌باشند.

#### مراجع

- O. Arslan, N. Billor, *Robust Liu estimator for regression based on an Mestimator*, Journal of Applied Statistics, 27 (1) 39–47, 2000.
- M. Çetin, *Variable Selection Criteria in Robust Regression*, unpublished PhD Thesis, University of Hacettepe.
- K. Liu, *A new class of based estimate in linear regression*, Communication in Statistics A, 22, 393–402, 1993.
- C.L. Mallows, *Some comment on  $C_p$* , Technometrics, 15 (4), 661–675, 1973.
- E. Ronchetti, R. Staudte, *A Robust version of Mallows's  $C_p$* , JASA, 89, 550–559, 1994.

## حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال و مشتق خانواده چندجمله‌ای‌های اپل

مهدی ادیبان\* و محمد تقی دستجردی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه زنجان  
madiban@znu.ac.ir  
tdast@znu.ac.ir

چکیده. در این مقاله، دو عضو مهم از خانواده چندجمله‌ای‌های اپل، یعنی چند جمله‌ای‌های برنولی و جنوچی را معرفی می‌کنیم و با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و مشتق آنها به حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری می‌پردازیم. انتگرال و مشتق مرتبه کسری بر اساس مفهوم ریمان-لیوویل و کاپوتو در نظر گرفته شده و مشتقات مرتبه کسری در معادلات دینامیک با ترکیب خطی چندجمله‌ای‌های برنولی و جنوچی دارای ضرایب نامعلوم و همچنین ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و مشتق مربوطه جایگزین شده‌اند. سپس شرایط لازم بهینگی برای تابع معیار را به صورت جبری بدست می‌آوریم که با روشهای عددی به راحتی محاسبه می‌گردند. در نهایت مقایسه‌ای بین این دو روش به عمل می‌آوریم.

### ۱. مقدمه

در برخی از مسائل کنترل بهینه به معادلات دیفرانسیلی برمی‌خوریم که مشتقات ظاهر شده در آنها دارای مراتب کسری هستند که به مسائل کنترل بهینه کسری (FOCPs) معروف هستند [۲]. به‌تازگی، ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و مشتق چندجمله‌ای‌های متعامد و نامتعامد برای حل این دسته از مسائل مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این مقاله با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنولی و جنوچی به حل مسائل کنترل بهینه کسری می‌پردازیم. برای این منظور مسئله کنترل بهینه کسری

---

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49J15; Secondary 49J53.  
واژگان کلیدی. کنترل بهینه کسری، خانواده چندجمله‌ای‌های اپل، ماتریس عملیاتی، انتگرال کسری ریمان-لیوویل، مشتق کسری کاپوتو.  
\* سخنران

زیر را در نظر می‌گیریم.

$$MinJ = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t))dt \quad (1.1)$$

$$D^\alpha x(t) = g(t, x(t)) + b(t)u(t) \quad (2.1)$$

$$D^{(i)}x(t_0) = x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad n-1 < \alpha \leq n$$

تعریف ۱.۱. انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو این‌گونه تعریف می‌شوند [۱].

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f^\tau(x) d\tau, \quad t > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, \quad n = [\alpha] \quad (4.1)$$

تعریف ۲.۱. تابع مولد و جمله‌ی عمومی چندجمله‌ای‌های برنولی و جنوچی عبارت‌اند از [۵].

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad B_i(t) = \sum_{r=1}^i \frac{i! B_{i-r}}{(i-r)! r!} t^r \quad (5.1)$$

$$\frac{2te^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad G_i(t) = \sum_{r=1}^i \frac{i! G_{i-r}}{(i-r)! r!} t^r \quad (6.1)$$

لم ۳.۱. ضرایب برنولی و جنوچی برای تقریب تابع  $f(t)$  از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_{j,r} G_j(t), \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_{j,r} B_j(t) \quad (7.1)$$

$$C = W^{-1} \langle f(t), G(t) \rangle, \quad C = W^{-1} \langle f(t), B(t) \rangle \quad (8.1)$$

قضیه ۴.۱. با فرض  $I^\alpha B(t) = \rho^\alpha B(t)$  ماتریس عملیاتی انتگرال  $\rho^\alpha$  برابر است با [۴].

$$\rho^\alpha = \begin{bmatrix} \theta_{1,1,1} & \theta_{1,2,1} & \dots & \theta_{1,M,1} \\ \sum_{r=1}^2 \theta_{2,1,r} & \sum_{r=1}^2 \theta_{2,2,r} & \dots & \sum_{r=1}^2 \theta_{2,M,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{r=1}^i \theta_{i,1,r} & \sum_{r=1}^i \theta_{i,2,r} & \dots & \sum_{r=1}^i \theta_{i,M,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{r=1}^M \theta_{M,1,r} & \sum_{r=1}^M \theta_{M,2,r} & \dots & \sum_{r=1}^M \theta_{M,M,r} \end{bmatrix} \quad \theta_{i,j,r} = \frac{i! B_{i-r}}{(i-r)! \Gamma(r+1+\alpha)} c_{j,r}$$

قضیه ۵.۱. با فرض  $I^\alpha G(t) = \rho^\alpha G(t)$  ماتریس عملیاتی انتگرال  $\rho^\alpha$  برابر است با [۳].

$$\rho^\alpha = \begin{bmatrix} \theta_{1,1,1} & \theta_{1,2,1} & \dots & \theta_{1,N,1} \\ \sum_{r=1}^2 \theta_{2,1,r} & \sum_{r=1}^2 \theta_{2,2,r} & \dots & \sum_{r=1}^2 \theta_{2,N,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{r=1}^i \theta_{i,1,r} & \sum_{r=1}^i \theta_{i,2,r} & \dots & \sum_{r=1}^i \theta_{i,N,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{r=1}^N \theta_{N,1,r} & \sum_{r=1}^N \theta_{N,2,r} & \dots & \sum_{r=1}^N \theta_{N,N,r} \end{bmatrix} \quad \theta_{i,j,r} = \frac{i! G_{i-r}}{(i-r)! \Gamma(r+1+\alpha)} c_{j,r}$$

در قضایای فوق  $B(t)$  و  $G(t)$  نمایانگر بردارهای ستونی حاصل از چند جمله‌ای‌های مولد برنولی و جنوچی با بعد  $M$  و  $N$  هستند.

نتیجه ۶.۱. با استفاده از قضیه (۴.۱) و جایگزینی آن در معادله دینامیک (۲.۱) داریم.

$$x(t) = C^T I^\alpha B(t) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \frac{t^i}{i!} C^T B(t) = g \left( t, C^T \rho^\alpha B(t) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \frac{t^i}{i!} \right) + b(t)u(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left( C^T B(t) - g \left( t, C^T \rho^\alpha B(t) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \frac{t^i}{i!} \right) \right)$$

نتیجه ۷.۱. با استفاده از قضیه (۵.۱) و جایگزینی آن در معادله دینامیک (۲.۱) داریم.

$$x(t) = C^T I^\alpha G(t) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \frac{t^i}{i!} C^T G(t) = g \left( t, C^T \rho^\alpha G(t) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \frac{t^i}{i!} \right) + b(t)u(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left( C^T G(t) - g \left( t, C^T \rho^\alpha G(t) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \frac{t^i}{i!} \right) \right)$$

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

اگر چه استفاده از ماتریس عملیاتی چندجمله‌ای‌های متعامد مانند ژاکوبی، لژاندر و چبیشف برای حل مسائل کنترل بهینه کسری نتایج دقیق‌تری به همراه دارند ولی محاسبات کامپیوتری آنها در نرم افزارهای ریاضی بسیار پیچیده و زمان‌بر می‌باشند. استفاده از خانواده چندجمله‌ای‌های نامتعامد اپل مانند برنولی و جنوچی برای این دسته از مسائل به علت داشتن صفرهای بیشتر در ماتریس عملیاتی آنها محاسبات کمتری لازم دارند و در نتیجه در مدت زمان کوتاه‌تر به جواب‌های دقیق‌تری می‌رسند.

مثال ۱.۲. مسئله کنترل بهینه کسری زیر

$$Min J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt$$

$$D^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1, \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

که جوابهای دقیق آن برای  $\alpha = 1$  عبارت‌اند از

$$x(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \beta \sinh(\sqrt{2}t)$$

$$u(t) = (1 + \sqrt{2}\beta) \cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \beta) \sinh(\sqrt{2}t)$$

$$\beta = -\frac{\cosh(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})}$$

با روش برنولی و جنوچی محاسبه شده و خطای مطلق به دست آمده روش برنولی در جدول (۱) و خطای مطلق به دست آمده روش جنوچی در جدول (۲) آورده شده است. مقایسه خطای مطلق دو جدول نشان دهنده دقت بیشتر روش جنوچی نسبت به روش برنولی است.



جدول ۱: خطای مطلق  $x(t)$  و  $u(t)$  برای  $\alpha = 1.5$  در روش برنولی

Keshavarz et al.						
t	M=3,x(t)	M=4,x(t)	M=5,x(t)	M=3,u(t)	M=4,u(t)	M=5,u(t)
0.0	$1.33 \times 10^{-3}$	$8.89 \times 10^{-5}$	$6.20 \times 10^{-6}$	$3.70 \times 10^{-4}$	$4.63 \times 10^{-5}$	$1.86 \times 10^{-6}$
0.1	$3.29 \times 10^{-4}$	$2.87 \times 10^{-5}$	$3.12 \times 10^{-6}$	$1.25 \times 10^{-4}$	$1.69 \times 10^{-5}$	$7.12 \times 10^{-7}$
0.2	$4.85 \times 10^{-4}$	$1.25 \times 10^{-5}$	$1.30 \times 10^{-6}$	$1.38 \times 10^{-4}$	$2.32 \times 10^{-5}$	$5.21 \times 10^{-7}$
0.3	$6.85 \times 10^{-5}$	$2.55 \times 10^{-5}$	$1.52 \times 10^{-6}$	$3.65 \times 10^{-4}$	$2.06 \times 10^{-4}$	$4.95 \times 10^{-6}$
0.4	$2.35 \times 10^{-4}$	$1.50 \times 10^{-5}$	$6.70 \times 10^{-7}$	$1.23 \times 10^{-4}$	$1.47 \times 10^{-5}$	$2.51 \times 10^{-7}$
0.5	$3.62 \times 10^{-4}$	$5.23 \times 10^{-6}$	$1.85 \times 10^{-6}$	$1.35 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-5}$	$5.73 \times 10^{-7}$
0.6	$2.13 \times 10^{-3}$	$2.80 \times 10^{-5}$	$3.22 \times 10^{-7}$	$4.63 \times 10^{-5}$	$1.50 \times 10^{-4}$	$4.86 \times 10^{-7}$
0.7	$2.02 \times 10^{-4}$	$2.25 \times 10^{-5}$	$1.09 \times 10^{-6}$	$5.62 \times 10^{-5}$	$1.25 \times 10^{-5}$	$5.85 \times 10^{-6}$
0.8	$5.30 \times 10^{-4}$	$1.63 \times 10^{-5}$	$9.16 \times 10^{-7}$	$1.71 \times 10^{-4}$	$8.43 \times 10^{-6}$	$2.52 \times 10^{-7}$
0.9	$2.48 \times 10^{-4}$	$4.16 \times 10^{-5}$	$2.54 \times 10^{-6}$	$6.35 \times 10^{-5}$	$2.35 \times 10^{-5}$	$7.58 \times 10^{-7}$

جدول ۲: خطای مطلق  $x(t)$  و  $u(t)$  برای  $\alpha = 1.5$  در روش جنوچی

Chang et al.						
t	N=3,x(t)	N=4,x(t)	N=5,x(t)	N=3,u(t)	N=4,u(t)	N=5,u(t)
0.0	$2.00 \times 10^{-6}$	$1.24 \times 10^{-6}$	$6.00 \times 10^{-7}$	$1.93 \times 10^{-4}$	$4.00 \times 10^{-5}$	$1.22 \times 10^{-6}$
0.1	$5.67 \times 10^{-5}$	$7.88 \times 10^{-6}$	$2.79 \times 10^{-6}$	$2.14 \times 10^{-5}$	$1.21 \times 10^{-6}$	$3.54 \times 10^{-8}$
0.2	$4.45 \times 10^{-4}$	$1.13 \times 10^{-5}$	$4.16 \times 10^{-7}$	$6.36 \times 10^{-5}$	$1.57 \times 10^{-5}$	$2.83 \times 10^{-7}$
0.3	$7.87 \times 10^{-5}$	$8.26 \times 10^{-6}$	$1.78 \times 10^{-7}$	$7.94 \times 10^{-5}$	$3.45 \times 10^{-6}$	$2.89 \times 10^{-7}$
0.4	$8.65 \times 10^{-5}$	$3.51 \times 10^{-5}$	$6.66 \times 10^{-7}$	$5.32 \times 10^{-5}$	$2.41 \times 10^{-5}$	$2.10 \times 10^{-7}$
0.5	$9.37 \times 10^{-5}$	$1.36 \times 10^{-6}$	$1.29 \times 10^{-6}$	$1.08 \times 10^{-4}$	$3.54 \times 10^{-6}$	$4.52 \times 10^{-7}$
0.6	$3.32 \times 10^{-4}$	$4.33 \times 10^{-6}$	$8.15 \times 10^{-8}$	$4.14 \times 10^{-5}$	$1.38 \times 10^{-5}$	$2.15 \times 10^{-7}$
0.7	$8.66 \times 10^{-5}$	$8.46 \times 10^{-5}$	$3.44 \times 10^{-8}$	$4.62 \times 10^{-5}$	$1.10 \times 10^{-5}$	$2.84 \times 10^{-7}$
0.8	$8.87 \times 10^{-5}$	$1.15 \times 10^{-5}$	$4.65 \times 10^{-7}$	$6.90 \times 10^{-5}$	$1.53 \times 10^{-6}$	$2.72 \times 10^{-8}$
0.9	$5.71 \times 10^{-5}$	$7.52 \times 10^{-6}$	$3.23 \times 10^{-7}$	$2.60 \times 10^{-5}$	$1.28 \times 10^{-6}$	$3.27 \times 10^{-7}$

### مراجع

۱. م. ص. تواضعی و م. توکلی کاخکی، سیستم‌ها و کنترل کننده‌های مرتبه کسری، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۹۴.
2. O.P. Agrawal, *A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems*, Nonlinear Dynam. 38 (2004), no. 1-4, 323-337.
3. P. Chang, F.I. Noratiqah, I. Abdulnasir and R.L. Jian, *A new efficient numerical scheme for solving fractional optimal control problems via a Genocchi operational matrix of integration*, J. Vib. Control. 1 (2017), no. 1, 1-13.
4. E. Keshavars, Y. Ordokhani and M. Razzaghi, *A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials*, J. Vib. Control 22 (2016), no. 18, 3889-3903.
5. S.H Rem, J.H. Jin and J. Jeong, *Integral Formulae of Bernoulli and Genocchi Polynomials*, Int. J. Math. Math. Sci. 47 (2012), no. 1, 1-8.

### اصل بهینه‌ی پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه با مرتبه‌ی کسری

محسن هادی‌نژاد\* و اسداله محمودزاده وزیری

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند  
mohsen.hadinejad93@birjand.ac.ir  
amvaziri@birjand.ac.ir

چکیده. در این تحقیق دستگاه‌های کسری با مشتقات ریمان-لیوویل بررسی شده‌اند. تحقیقات اخیر نمایانگر آن است که می‌توان دینامیک پدیده‌های فیزیکی بسیاری را با استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری به‌طور دقیق مدل‌سازی کرد. در این تحقیق نشان داده می‌شود که اگر معادلات دیفرانسیل کسری شامل یک کنترل متغیر و یک شاخص عملکرد مشخص باشند، یک مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری بدست می‌آید.

#### ۱. مقدمه

در سال‌های گذشته حساب دیفرانسیل کسری نقش مهمی در ریاضیات، فیزیک، الکترونیک، مکانیک و... ایفا کرده است. اگر معادلات دیفرانسیل کسری شامل متغیر کنترل و تابعی معیار باشند، مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری (م.ک.ب.ک) بدست می‌آید. م.ک.ب.ک. زیر را در نظر می‌گیریم

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(t) = g(t, y(t), u(t)), \quad t \in [a, b]. \quad (1.1)$$

$$(I_{a+}^{1-\alpha} y)(a) = y_0, \quad (2.1)$$

$$u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [a, b], \quad (3.1)$$

$$H(y, u) = \int_a^b g_0(t, y(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

که در آن  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  و  $g_0 : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$  و  $0 < \alpha < 1$  می‌باشد.

واژگان کلیدی. مسئله کنترل بهینه کسری، اصل کمینه پونتریاگین، مشتقات کسری.  
\* سخنران

**قضیه ۱.۱.** با فرض  $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$  و  $\alpha \in (0, 1)$  فرض می‌کنیم  $M$  مجموعه‌ی فشرده بوده و

- (1<sub>g</sub>) نسبت به  $g \in C^1, y \in \mathbb{R}^n$ ؛  
 (2<sub>g</sub>) برای هر  $u \in M$  و  $y \in \mathbb{R}^n$  تابع  $g_0(\cdot, y, u)$  روی  $[a, b]$  اندازه‌پذیر بوده و برای هر  $t$  که ت.د. متعلق به  $[a, b]$  است و هر  $y \in \mathbb{R}^n$  تابع  $g_0(t, y, \cdot)$  روی  $M$  پیوسته باشد؛  
 (3<sub>g</sub>) نسبت به  $g_0 \in C^1, y \in \mathbb{R}^n$  بوده و برای هر  $t$  که ت.د. متعلق به  $[a, b]$  است و هر  $y \in \mathbb{R}^n$ ،  $u \in M$  با  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ ،  $\bar{a}_1 \in L^1([a, b], \mathbb{R}_0^+)$  و  $\bar{a}_2 \in L^{p'}([a, b], \mathbb{R}_0^+)$ ،  $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \geq 0$  نامساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$|g_0(t, y, u)| \leq \bar{a}_1(t) + \bar{C}_1|y|^p,$$

$$|(g_0)_x(t, y, u)| \leq \bar{a}_2(t) + \bar{C}_2|y|^{p-1},$$

(4<sub>g</sub>) به ازای هر  $u \in M, y \in \mathbb{R}^n$  توابع  $g_y(\cdot, y, u)$  و  $(g_0)_y(\cdot, y, u)$  روی  $[a, b]$  اندازه‌پذیر باشند؛

(5<sub>g</sub>) برای هر  $t$  که ت.د. متعلق به  $[a, b]$  است و برای هر  $y \in \mathbb{R}^n$  توابع  $g_y(t, y, 0)$  و  $(g_0)_y(t, y, 0)$  روی  $M$  پیوسته باشند؛

(6<sub>g</sub>) برای هر  $t$  که ت.د. متعلق به  $[a, b]$  است و هر  $y \in \mathbb{R}^n$  مجموعه‌ی

$$\tilde{Z} := \left\{ (g_0(t, y, u), g(t, y, u)) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in M \right\}$$

محدب باشد؛

اگر زوج  $(y_*(\cdot), u_*(\cdot))$  جواب بهینه موضعی مسئله‌ی ۱.۱ تا ۴.۱ باشد آنگاه تابع  $\lambda \in I_{b-}^\alpha(L^{p'})$  وجود دارد بطوری که برای  $t$  ت.د. متعلق به  $[a, b]$  است و

$$(I_{b-}^{1-\alpha}\lambda)(b) = 0, \quad (5.1)$$

داریم:

$$(D_{b-}^\alpha\lambda)(t) = g_y^T(t, y_*(t), u_*(t))\lambda(t) - (g_0)_y(t, y_*(t), u_*(t)) \quad (6.1)$$

علاوه بر این برای  $t$  که ت.د. متعلق به  $[a, b]$  است داریم:

$$(7.1)$$

$$g_0(t, y_*(t), u_*(t)) - \lambda(t)g(t, y_*(t), u_*(t)) = \min_{u \in M} \{g_0(t, y_*(t), u) - \lambda(t)g(t, y_*(t), u)\}.$$

**قضیه ۲.۱.** با فرض  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < P < \frac{1}{1-\alpha}$  اگر  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $v(\cdot) \in L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$  مسئله‌ی

$$\begin{cases} (D_{a+}^\alpha x)(t) = Cx(t) + v(t), & t \in [a, b] \\ (I_{a+}^{1-\alpha}x)(a) = x_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

یک جواب منحصریفر در  $\{ \frac{\tilde{d}}{(t-a)^{1-\alpha}}; \tilde{d} \in \mathbb{R}^n \}$  دارد که برای هر  $t \in [a, b]$  ت.د. بشکل زیر بیان می‌گردد

$$x(t) = \Phi(t-a)x_0 + \int_a^t \Phi(t-s)v(s)ds \quad (9.1)$$

قضیه ۳.۱. با فرض  $0 < \alpha < 1$  و  $P \geq 1$  برای  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $w \in \mathbb{R}^n$  مسئله‌ی

$$\begin{cases} (D_{b^-}^\alpha x)(t) = Dx(t) + w, & t \in [a, b] \\ (I_{b^-}^{1-\alpha} x)(b) = 0 \end{cases}$$

دارای یک جواب منحصر بفرد  $x(\cdot)$  در  $I_{b^-}^\alpha(L^p)$  است که به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k (b-t)^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} w, \quad t \in [a, b].$$

۲. دست‌آوردهای پژوهش

به عنوان دستاوردی از این پژوهش و کاربرد قضیه‌های بیان شده به حل م.ک.ب.ک. زیر می‌پردازیم:

با فرض  $y \in \mathbb{R}^2$ ،  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ،  $y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،  $\alpha = \frac{1}{2}$ ،  $p = \frac{3}{2}$ ؛ م.ک.ب.ک. زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(D_{0^+}^\alpha y)(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t \in [0, 2] \quad (۱.۲)$$

$$(I_{0^+}^{1-\alpha} y)(0) = y_0, \quad (۲.۲)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad t \in [0, 2], \quad (۳.۲)$$

$$H(y, u) = \int_0^2 (y_1(t) - y_2(t) + u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (۴.۲)$$

در این حالت

$$g(t, y, u) = Ay + Bu,$$

$$g_0(t, y, u) = \langle (1, -1), y \rangle + u.$$

البته،

$$A^k = (A^T)^k = 0, \quad k \geq 2,$$

$$g_y(t, y, u) = A, \quad (g_0)_y(t, y, u) = [1, -1].$$

براحتی می‌توان نشان داد که تمام مفروضات قضیه‌ی ۱.۱ برقرارند. در نتیجه، اگر  $(y_*(\cdot), u_*(\cdot))$  جواب

بهبینه موضعی مسئله‌ی ۱.۲ تا ۴.۲ باشد، یک  $\lambda(\cdot) \in I_{2^-}^{\frac{1}{2}}(L^3)$  وجود دارد بطوریکه

$$\left( D_{2^-}^{\frac{1}{2}} \lambda \right) (t) = A^T \lambda(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2] \quad (۵.۲)$$

$$\left( I_{2^-}^{\frac{1}{2}} \lambda \right) (2) = 0 \quad (۶.۲)$$

بعلاوه برای هر  $t \in [0, 2]$  داریم:

$$u_*(t) - \lambda(t)Bu_*(t) = \min_{u \in [0,1]} \{u - \lambda(t)Bu\}. \quad (۷.۲)$$

از قضیه‌ی ۳.۱ به این نتیجه می‌رسیم که جواب مسئله‌ی ۵.۲، ۶.۲ به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(2-t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\ \frac{(2-t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{(2-t)}{\Gamma(2)} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2].$$

در نتیجه شرط ۷.۲ برای هر  $t \in [0, 2]$  معادل شرط زیر است

$$u_*(t) - (2-t)u_*(t) = \min_{u \in [0,1]} \{u - (2-t)u\} = \begin{cases} t^{-1} & t \in [0,1] \\ 0 & t \in [1,2] \end{cases}$$

بنابراین

$$u_*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \quad \dots \\ 0 & t \in [1,2] \quad \dots \end{cases}$$

با توجه به قضیه‌ی ۲.۱، یک جواب دستگاه ۱.۲، ۲.۲ متناظر با  $u_*(0)$  بشکل زیر معرفی می‌شود

$$y_*(t) = \Phi(t)y_0 + \int_0^t \Phi(t-s)Bu_*(s)ds = \Phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{cases} \int_0^t \Phi(t-s)Bds & t \in [0,1] \quad \dots \\ \int_0^t \Phi(t-s)Bds & t \in [1,2] \quad \dots \end{cases}$$

براحتی می‌توان نشان داد که

$$y_*(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1-t - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\ \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \end{bmatrix}, & t \in [0,1] \quad \dots \\ \begin{bmatrix} -\frac{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\ \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \end{bmatrix}, & t \in [1,2] \quad \dots \end{cases}$$

این بدان معنی است که جفت  $(y_*(t), u_*(t))$  تنها زوجی است که می‌تواند جواب بهینه مسئله‌ی ۱.۲ تا ۴.۲ باشد.

### مراجع

۱. مختار اس. بازارا، برنامه‌ریزی خطی، ترجمه اسماعیل خرم، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ هفتم، ۱۳۸۵.
۲. سل آی گس، برنامه‌ریزی خطی، ترجمه فائزه توتونیان، نشر دانشگاه فردوسی، ۱۳۸۹.
3. Idczak D, Kamocki R. On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in  $R^n$ . *Fractional Calculus and Applied Analysis* 2011; 14(4):538–553. DOI: 10.2478/s13540-011-0033-5.
4. Ioffe AD, Tichomirow BM. *Theory of Extremal Problems*. North-Holland Pub. Co. Amsterdam: New York, Oxford, 1979.
5. Idczak D. Optimal control of a coercive Dirichlet problem. *SIAM Journal on Control and Optimization* 1998; 36(4):1250–1267.